

**GUÍA DE ESTUDIOS  
MATEMATICAS III**

## INTRODUCCION

La Matemática es la ciencia que se ocupa de describir y analizar las cantidades, el espacio y las formas, los cambios y relaciones, así como la incertidumbre. Si miramos a nuestro alrededor vemos que esos componentes están presentes en todos los aspectos de la vida de las personas, en su trabajo, en su quehacer diario, en los medios de comunicación, etc.

Las matemáticas, tanto histórica como socialmente, forman parte de nuestra cultura y los individuos deben ser capaces de apreciarlas y comprenderlas. Es evidente, que en nuestra sociedad, dentro de los distintos ámbitos profesionales, es preciso un mayor dominio de ideas y destrezas matemáticas que las que se manejaban hace tan sólo unos años. La toma de decisiones requiere comprender, modificar y producir mensajes de todo tipo; en la información que se maneja cada vez aparecen con más frecuencia tablas, gráficos y fórmulas que demandan conocimientos matemáticos para su correcta interpretación. Por ello, los ciudadanos deben estar preparados para adaptarse con eficacia a los continuos cambios que se generan.



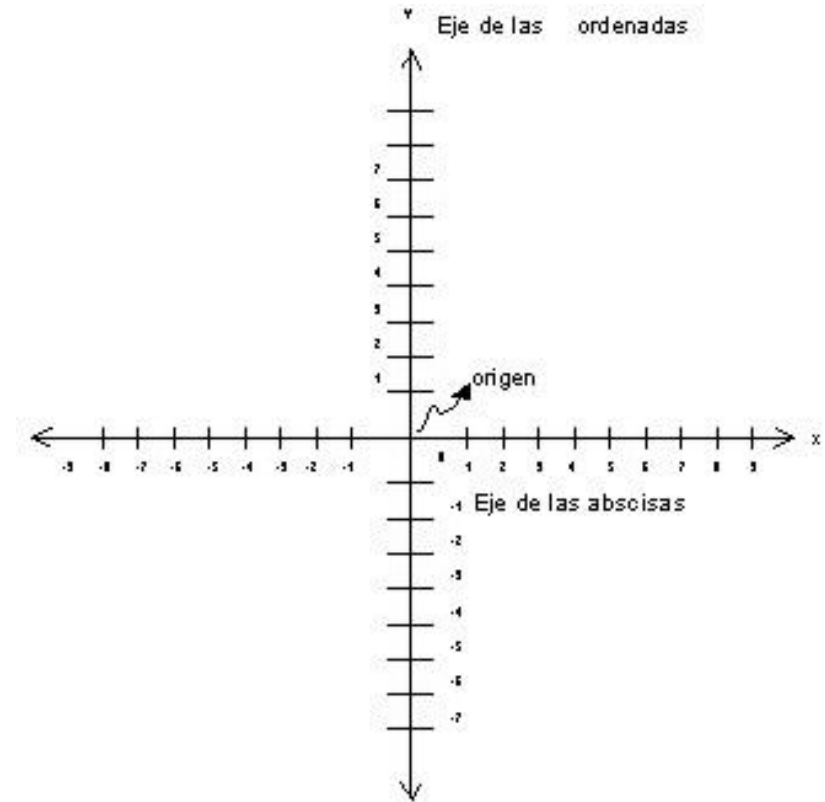
Se pretende configurar el área de matemáticas no sólo como un conjunto de ideas y formas de actuar que conllevan la utilización de cantidades y formas geométricas, sino, y sobre todo, como un área capaz de generar preguntas, obtener modelos e identificar relaciones y estructuras, de modo que, al analizar los fenómenos y situaciones que se presentan en la realidad, se puedan obtener informaciones y conclusiones que inicialmente no estaban explícitas. Presentan unas características que se deben destacar para comprenderlas y saber cómo aplicarlas. Las matemáticas son universales: Los resultados que se obtienen son aceptados por toda la comunidad internacional, lo que no quiere decir que los métodos que se han utilizado históricamente sean iguales: lo que sí son universales son las actividades, muchas entroncadas con la cultura de los pueblos, que han impulsado el conocimiento matemático. De esta manera hablamos de: contar, localizar, medir, explicar, jugar, etc. La Matemática es una ciencia viva. Su conocimiento no está fosilizado, además de una herencia recibida es una ciencia que hay que construir. Un reto interesante es el contextualizar adecuadamente los nuevos contenidos que se presentan.



## 1.1 EL PLANO CARTESIANO

El plano cartesiano está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y otra vertical que se cortan en un punto. La recta horizontal es llamada eje de las abscisas o de las equis ( $x$ ), y la vertical, eje de las ordenadas o de las yes, ( $y$ ); el punto donde se cortan recibe el nombre de origen

El **plano cartesiano** tiene como finalidad describir la posición de puntos, los cuales se representan por sus coordenadas o pares ordenados.



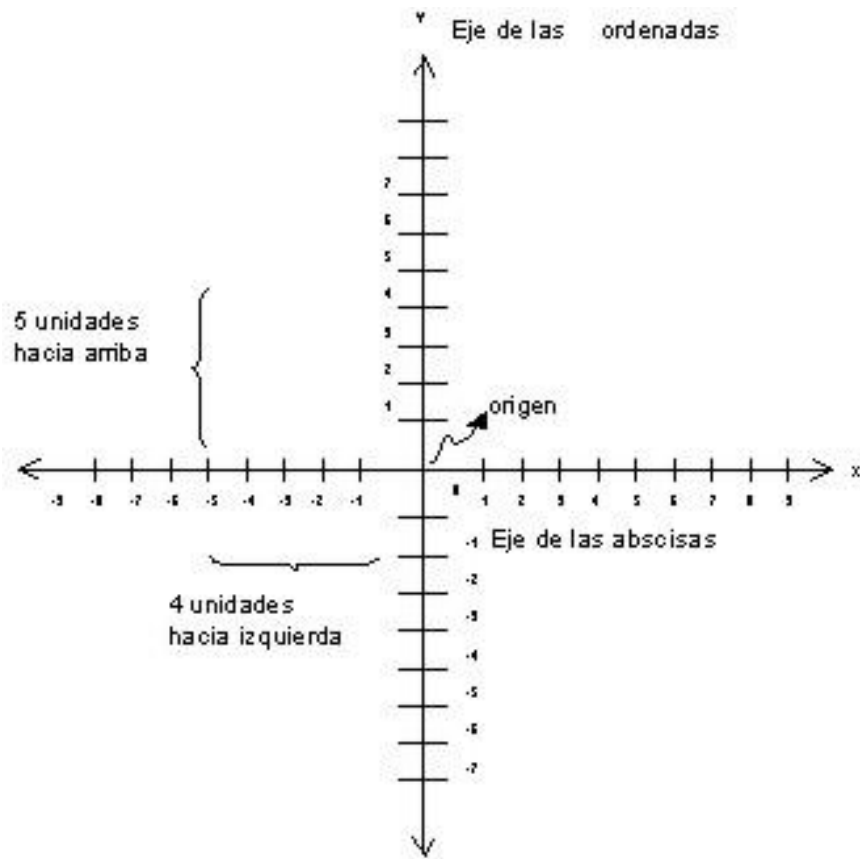
Las coordenadas se forman asociando un valor del eje de las equis a uno de las yes, respectivamente, esto indica que un **punto (P)** se puede ubicar en el plano cartesiano tomando como base sus coordenadas, lo cual se representa como:

$P(x, y)$

Para localizar puntos en el plano cartesiano se debe llevar a cabo el siguiente procedimiento:

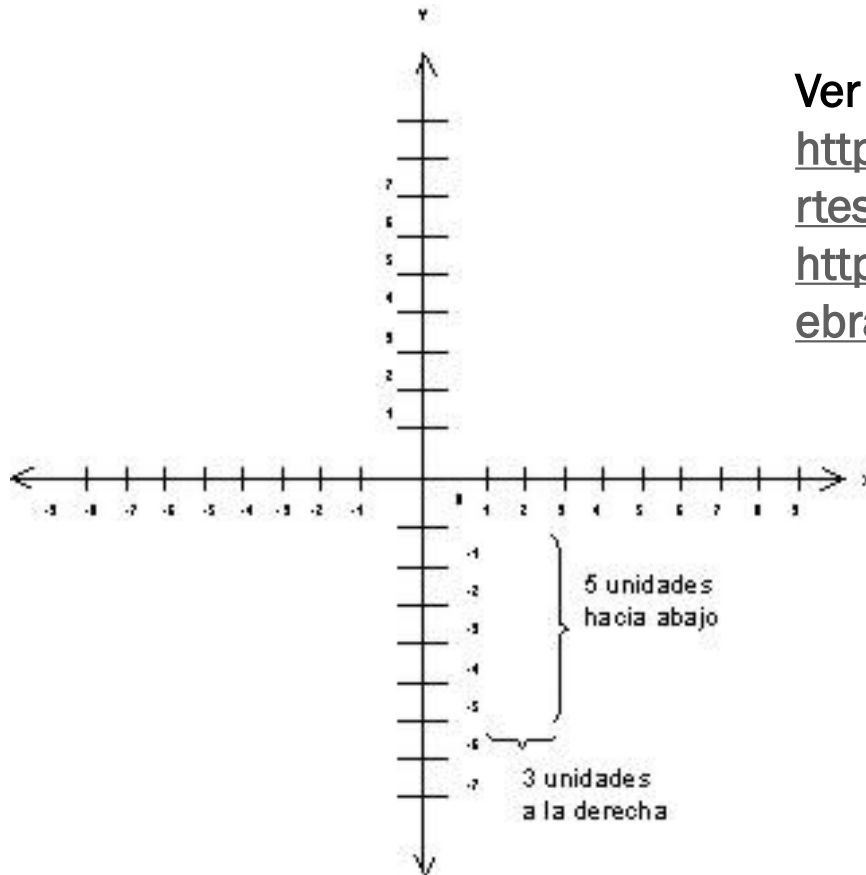
- 1.** Para localizar la abscisa o valor de  $x$ , se cuentan las unidades correspondientes hacia la derecha si son positivas o hacia la izquierda si son negativas, a partir del punto de origen, en este caso el cero.

- 2.** Desde donde se localiza el valor de  $x$ , se cuentan las unidades correspondientes (en el eje de las ordenadas) hacia arriba si son positivas o hacia abajo, si son negativas y de esta forma se localiza cualquier punto dadas ambas coordenadas.



De modo inverso, este procedimiento también se emplea cuando se requiere determinar las coordenadas de cualquier punto que esté en el plano cartesiano

De lo anterior se concluye que:



Ver en Internet:

<http://www.skool.es/content/los/maths/cartesian/launch.html>

[http://www.edilatem.com/index\\_archivos/algebra5tintas.pdf](http://www.edilatem.com/index_archivos/algebra5tintas.pdf)

Para determinar las coordenadas de un punto o localizarlo en el plano cartesiano, se encuentran unidades correspondientes en el eje de las x hacia la derecha o hacia la izquierda y luego las unidades del eje de las y hacia arriba o hacia abajo, según sean positivas o negativas, respectivamente.

## 1.2 Distancia entre dos puntos

Por haberlo estudiado, sabemos que el Plano cartesiano se usa como un sistema de referencia para localizar puntos en un plano.

Otra de las utilidades de dominar los conceptos sobre el Plano cartesiano radica en que, a partir de la ubicación de las coordenadas de dos puntos es posible calcular la distancia entre ellos.

Cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje  $x$  (de las abscisas) o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus abscisas ( $x_2 - x_1$ ).

## Ejemplo:

La distancia entre los puntos  $(-4, 0)$  y  $(5, 0)$  es  $5 - (-4) = 5 + 4 = 9$  unidades.

Cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje  $y$  (de las ordenadas) o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus ordenadas.

Ahora, si los puntos se encuentran en cualquier lugar del sistema de coordenadas, la distancia queda determinada por la relación:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para demostrar esta relación se deben ubicar los puntos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  en el sistema de coordenadas, luego formar un triángulo rectángulo de hipotenusa  $P_1P_2$  y emplear el Teorema de Pitágoras.

**Ejemplo:**

Calcula la distancia entre los puntos  
 $P_1(7, 5)$  y  $P_2(4, 1)$

$$d = \sqrt{(4 - 7)^2 + (1 - 5)^2}$$

$$d = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$d = \sqrt{9 + 16}$$

$$d = \sqrt{25}$$

$$d = 5 \text{ unidades}$$

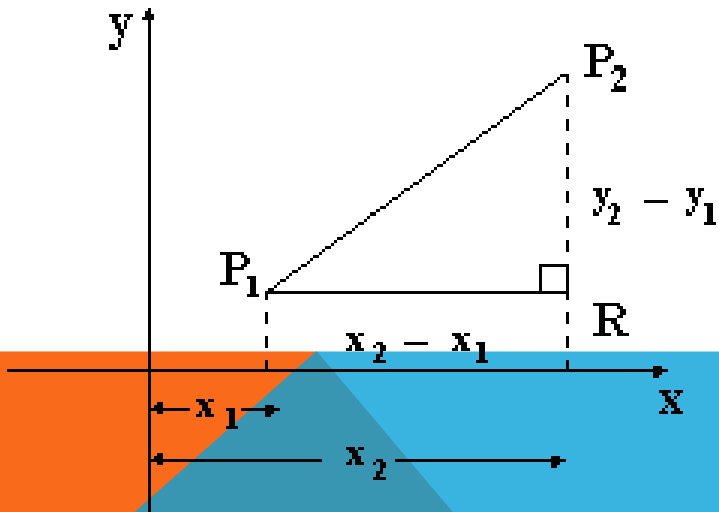
## 1.2.1 Demostración

Sean  $P_1 (x_1, y_1)$  y  $P_2 (x_2, y_2)$  dos puntos en el plano.

La distancia entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$  denotada por  $d =$  esta dada por:

$$(1) \quad d = |P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En la **Figura 1** hemos localizado los puntos  $P_1 (x_1, y_1)$  y  $P_2 (x_2, y_2)$  así como también el segmento de recta



## Figura 1

Al trazar por el punto  $P_1$  una paralela al eje  $x$  (abscisas) y por  $P_2$  una paralela al eje  $y$  (ordenadas), éstas se interceptan en el punto  $R$ , determinado el triángulo rectángulo  $P_1RP_2$  y en el cual podemos aplicar el Teorema de Pitágoras:

$$\overbrace{(\overline{P_1P_2})}^{c^2}{}^2 = \overbrace{(\overline{P_1R})}^{a^2}{}^2 + \overbrace{(\overline{RP_2})}^{b^2}{}^2$$

$$(\overline{P_1P_2})^2 = |\overline{P_1P_2}|^2$$

$$\overline{P_1R} = x_2 - x_1$$

y

$$\overline{RP_2} = y_2 - y_1$$

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En la fórmula (1) se observa que la distancia entre dos puntos es siempre un valor positivo.

El orden en el cual se restan las coordenadas de los puntos  $P_1$  y  $P_2$  no afecta el valor de la distancia.

### **Fuente Internet:**

<http://huitoto.udea.edu.co/Matematicas/4.1.html>

### **Ver en Internet**

[http://tutormatematicas.com/ALG/Formulas\\_punto\\_medio\\_y\\_distancia.html](http://tutormatematicas.com/ALG/Formulas_punto_medio_y_distancia.html)

### **Ver en Youtube:**

<http://vodpod.com/watch/1266941-distancia-entre-dos-puntos>

<http://matematicasies.com/?Distancia-entre-dos-puntos>

<http://www.youtube.com/watch?v=422FkHMMLcl>

## 1.3 PUNTO MEDIO

El resultado de la comparación de dos cantidades de la misma especie, se llama razón o relación de dichas cantidades. Las razones o relaciones pueden ser razones por cociente o geométricas.

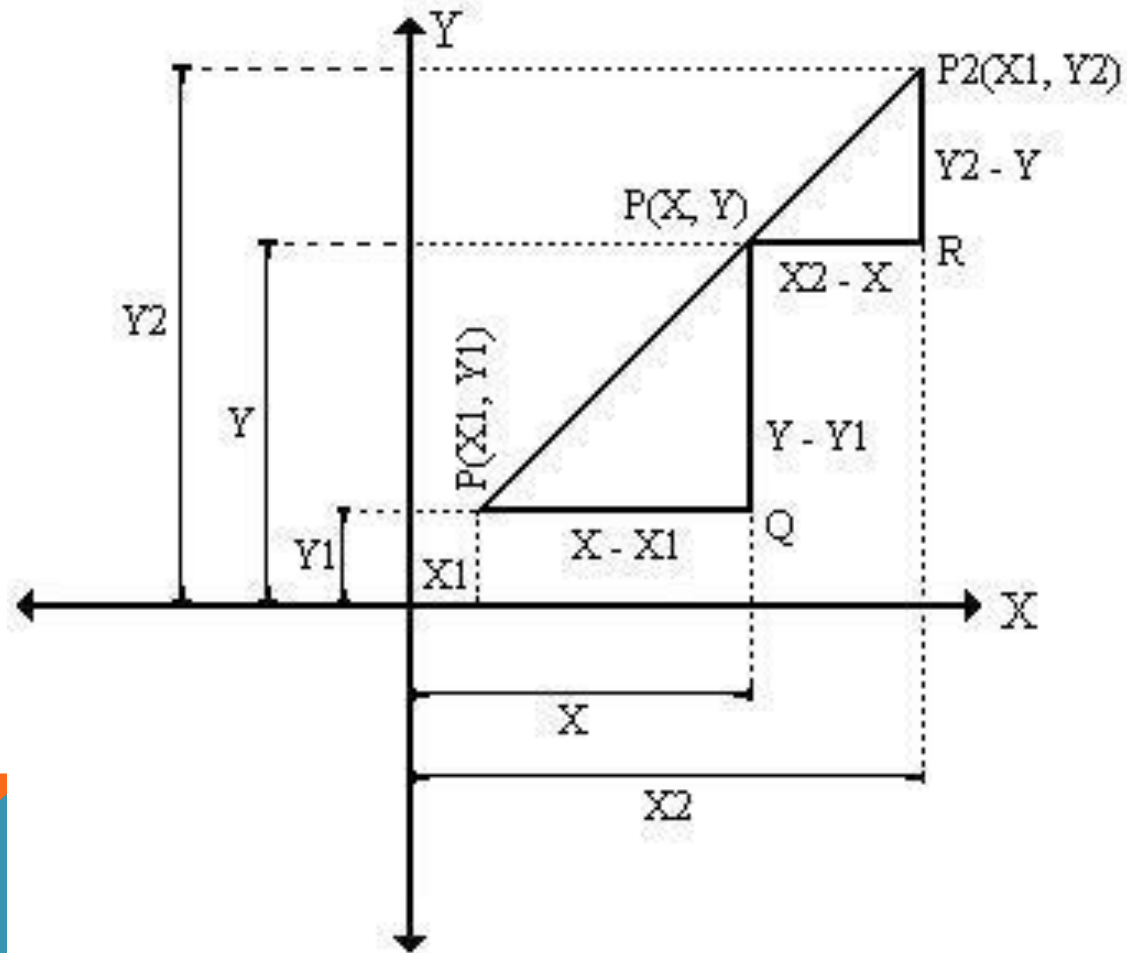
La razón por cociente o geométrica es el resultado de la comparación de dos cantidades homogéneas con el objeto de saber cuantas veces la una contiene a la otra.

La *razón por cociente o geométrica* es el resultado de la comparación de dos cantidades homogéneas con el objeto de saber cuantas veces la una contiene a la otra.

**Observación:** En geometría analítica las razones deben considerarse con su signo o sentido porque se trata de segmentos de recta dirigidos.

Consideramos los puntos  $A(X_1, Y_1)$  y  $B(X_2, Y_2)$  los extremos de una recta. Sea  $P(X, Y)$  el punto de división que se encuentra entre la recta, como se indica en la figura:

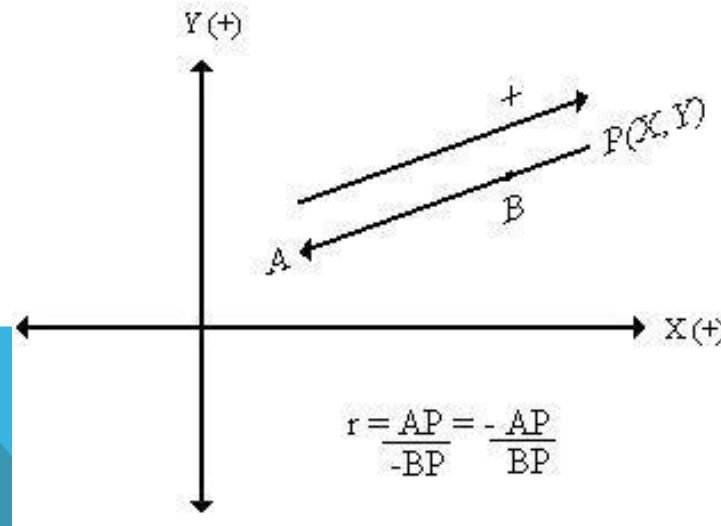
Por su diferencia de segmentos se obtienen los valores de los catetos de dos triángulos rectángulos formados:



El punto  $P(X, Y)$  divide el segmento en la relación  $r = \frac{AP}{PB}$  como AB y PB mismo sentido el valor de  $r$  será positivo,

Si el punto  $P(X, Y)$  se encuentra fuera de los extremos A y B en el sentido de AP y PB serían opuestos y el valor de  $r$  será negativo

Considerando los triángulos semejantes formados tendremos una relación de hipotenusas y catetos de la siguiente manera:



Considerando los triángulos semejantes formados tendremos una relación de hipotenusas y catetos de la siguiente manera:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AO}{BR} = \frac{X - X_1}{X_2 - X} = r$$

Despejando a X;

$$X - X_1 = r(X_2 - X) \quad \longrightarrow \quad X - X_1 = rX_2 - rX$$
$$r + rX = rX_2 - X_1$$

factorizando

$$X(1+r) = rX_2 + X_1$$

$$X = \frac{rX_2 + X_1}{1+r}$$

por lo tanto:

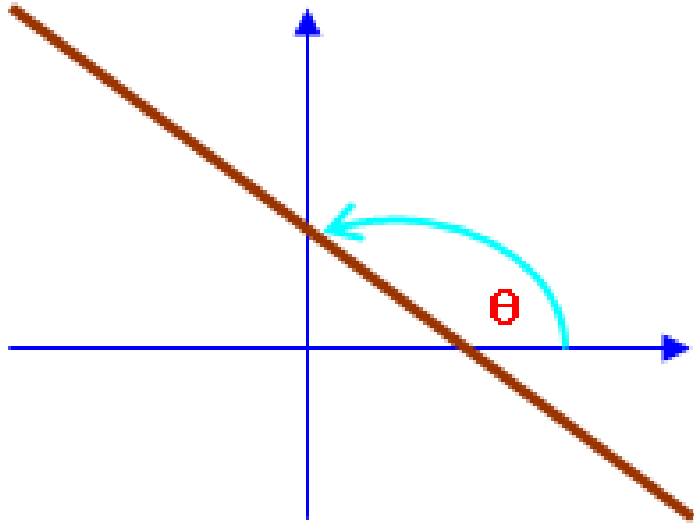
VER EL SIGUIENTE VIDEO

<https://www.youtube.com/watch?v=yy3MzlMOcPO>

## 2.1 Pendiente e inclinación de la Recta

Se denomina ángulo de inclinación de una recta al ángulo que determina dicha recta con el sentido positivo del eje  $x$ , siendo medido este ángulo en sentido contrario a las manecillas del reloj, desde el eje positivo de las  $x$  hasta la recta. El ángulo de inclinación de una recta es un valor que siempre está comprendido entre  $0$  y  $180^\circ$ , además indica su posición en el plano:

- Así si una recta es paralela al eje  $x$  su  $\angle$  de inclinación es de  $0^\circ$ .
- Si es  $\perp$  al eje  $x$ , su ángulo es de  $90^\circ$ .
- Si se inclina hacia la derecha el ángulo es agudo.
- Si se inclina hacia la izquierda su ángulo es obtuso.



El concepto de inclinación de una recta es fácil de comprender; tiene, no obstante, el inconveniente de que su utilización en geometría analítica es difícil, razón por la cual se prefiere emplear la pendiente del ángulo de inclinación que se define de la siguiente manera: pendiente de una recta es la tangente de su ángulo de inclinación. Es costumbre designar la pendiente de una recta por la letra minúscula **m**. Si la inclinación de la recta es  $\theta$ , podemos escribir  $m = \text{tang } \theta$ , y deducimos  $\theta = m$

así:

- a) Si la recta es paralela al eje x,  $\theta = 0^\circ$  y  $m = \text{tang } \theta = 0$
- b) Si la recta es perpendicular al eje x,  $\theta = 90^\circ$  y  $m = \text{tang } \theta = \infty$
- c) Si la recta se inclina hacia la derecha,  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  y  $m = \text{tang } \theta > 0$
- d) Si la recta se inclina hacia la izquierda,  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  y  $m = \text{tang } \theta < 0$

Para hallar la pendiente se nos presentan algunos casos distintos:

a) *Cuando se conoce el ángulo, la pendiente se halla sacando la tangente de su ángulo.*

EJEMPLO:

Hallar la pendiente, sabiendo que su ángulo de inclinación es igual a  $45^\circ$ .

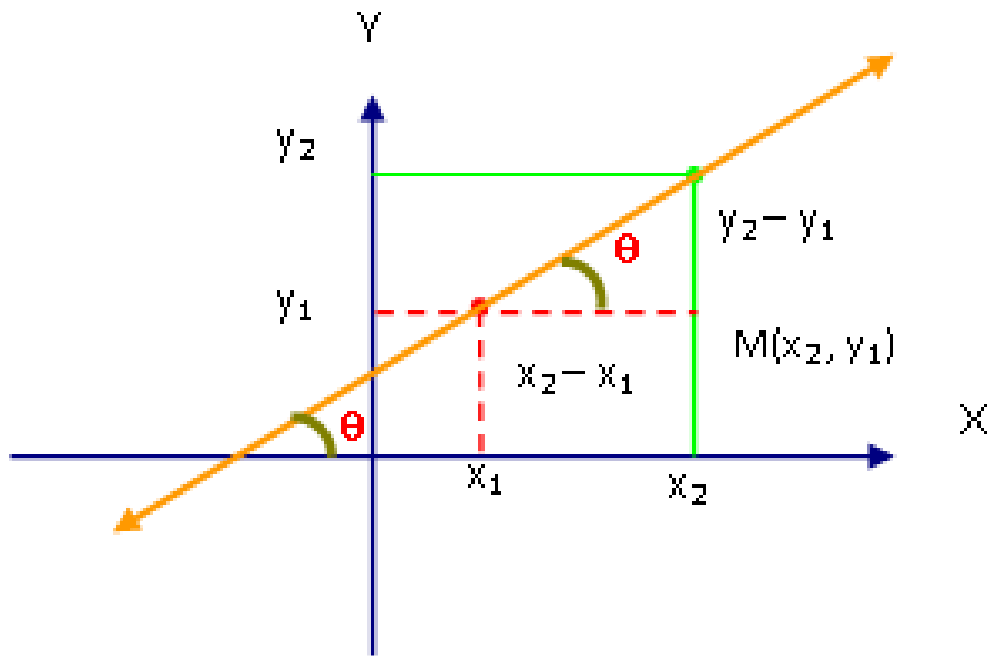
$$m = \text{tang } \theta \quad m = \text{tang } 45^\circ \quad m = 1$$

Hallar la pendiente, sabiendo que su ángulo de inclinación es igual a  $60^\circ$ .

$$m = \text{tang } \theta \quad m = \text{tang } 60^\circ \quad m = 1.73$$

a) *Cuando se tiene dos puntos situados sobre una recta. Sean  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$  dos puntos sobre la recta L.*

Observemos la figura (1)



Por definición  $m = \text{tang } \theta = \frac{BM}{AM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

De donde:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

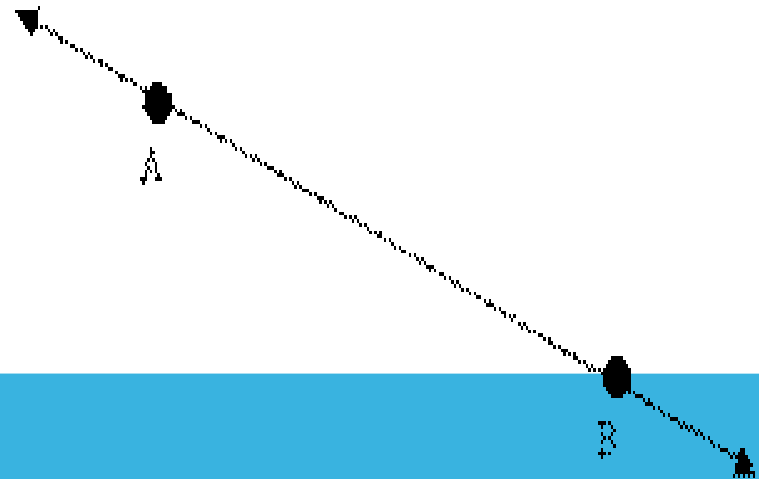
<https://www.youtube.com/watch?v=-aLNUIsly78>

## 2.3 Ecuación de la recta

La idea de **línea recta** es uno de los conceptos intuitivos de la Geometría (como son también el **punto** y el **plano**).

La recta se puede entender como un conjunto infinito de puntos alineados en una única dirección. Vista en un plano, una recta puede ser horizontal, vertical o diagonal (inclinada a la izquierda o a la derecha).

La línea de la derecha podemos verla, pero a partir de los datos que nos entrega la misma línea (par de coordenadas para A y par de coordenadas para B en el **plano cartesiano**) es que podemos encontrar una expresión algebraica (una función) que determine a esa misma recta.



El nombre que recibe la expresión algebraica (función) que determine a una recta dada se denomina **Ecuación de la Recta**.

Para comprender este proceder es como si la misma línea solo se cambia de ropa para que sepan de su existencia pero expresada en términos matemáticos (como una ecuación).

Es en este contexto que la Geometría analítica nos enseña que una recta es la representación gráfica de una expresión algebraica (función) o ecuación lineal de primer grado.

Esta ecuación de la recta varía su formulación de acuerdo con los datos que se conozcan de la línea recta que se quiere representar algebraicamente. Dicho en otras palabras, hay varias formas de representar la ecuación de la recta.



### 2.3.1 Ecuación general de la recta

Esta es una de las formas de representar la ecuación de la recta.

De acuerdo a uno de los postulados de la Geometría Euclidiana, para determinar una línea recta sólo es necesario conocer dos puntos (A y B) de un plano (en un **plano cartesiano**), con **abscisas (x)** y **ordenadas (y)**.

Ahora bien, conocidos esos dos puntos, todas las rectas del plano, sin excepción, quedan incluidas en la ecuación

$$Ax + By + C = 0$$

Que también puede escribirse como

$$ax + by + c = 0$$

### 2.3.2 Ecuación principal de la recta

Esta es otra de las formas de representar la ecuación de la recta.

Pero antes de entrar en la ecuación principal de la recta conviene recordar lo siguiente:

Cada punto  $(x, y)$  que pertenece a una recta se puede representar en un sistema de coordenadas, siendo  $x$  el valor de la abscisa (horizontal) e  $y$  el valor de la ordenada (vertical).

$$(x, y) = (\text{Abscisa} , \text{Ordenada})$$

Ejemplo: El punto  $(-3, 5)$  tiene por abscisa  $-3$  y por ordenada  $5$ .

Si un par de valores  $(x, y)$  pertenece a la recta, se dice que ese punto satisface la ecuación.

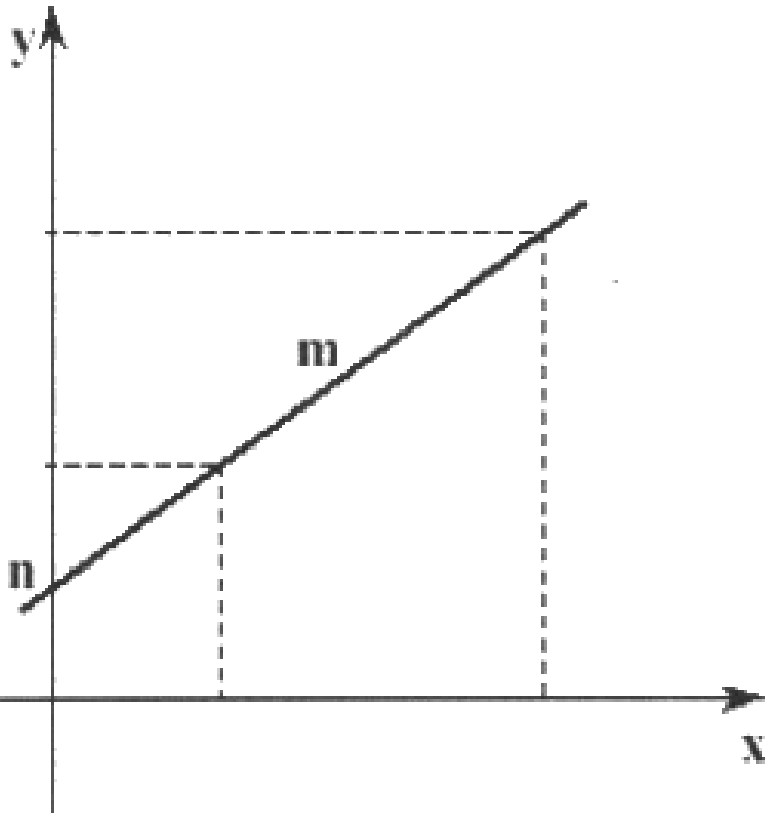
Ejemplo: El punto  $(7, 2)$  (el  $7$  en la **abscisa**  $x$  y el  $2$  en la **ordenada**  $y$ ) satisface la ecuación  $y = x - 5$ , ya que al reemplazar queda  $2 = 7 - 5$  lo que resulta verdadero.

Recordado lo anterior, veamos ahora la **ecuación de la recta que pasa solo por un punto conocido y cuya pendiente (de la recta) también se conoce**, que se obtiene con la fórmula

$$y = mx + n$$

que considera las siguientes variables: un punto  $(x, y)$ , la pendiente  $(m)$  y el punto de intercepción en la ordenada  $(n)$ , y es conocida como **ecuación principal de la recta** (conocida también como forma simplificada, como veremos luego).

Al representar la ecuación de la recta en su forma principal vemos que aparecieron dos nuevas variables: la  $m$  y la  $n$ , esto agrega a nuestra ecuación de la recta dos nuevos elementos que deben considerarse al analizar o representar una recta: la **pendiente** y el **punto de intercepción** (también llamado **intercepto**) en el **eje de las ordenadas  $(y)$** .



Respecto a esto, en el gráfico de la izquierda,  $m$  representa la pendiente de la recta y permite obtener su grado de inclinación (en relación a la horizontal o abscisa), y  $n$  es el **coeficiente de posición**, el número que señala el punto donde la recta interceptará al eje de las ordenadas ( $y$ ).

#### Forma simplificada de la ecuación de la recta

Si se conoce la pendiente  $m$ , y el punto donde la recta corta al eje de ordenadas es  $(0, b)$  (corresponde a  $n$  en la fórmula principal ya vista), podemos deducir, partiendo de la ecuación de la recta de la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y - b = mx$$

$$y = mx + b$$

Esta es una segunda forma de la **ecuación principal de la recta** (se la llama también **forma explícita de la ecuación**) y se utiliza cuando se conocen la pendiente y la ordenada al origen (o intercepto), que llamaremos **b** ( no olvidemos que corresponde a la **n** en la primera forma de la ecuación principal). También se puede utilizar esta ecuación para conocer la pendiente y la ordenada al origen a partir de una ecuación dada.

Ejemplo: La ecuación  $y = 4x + 7$  tiene pendiente 4 y coeficiente de posición 7, lo cual indica que interceptará al eje **y** en el punto **(0, 7)**.

Conocida la fórmula de la ecuación principal (simplificada o explícita, como quieran llamarla) de la recta es posible obtener la ecuación de cualquier recta siempre que se nos den al menos dos variables de ella: puede ser la pendiente, puede ser un punto o puede ser el intercepto

Esto significa que si te dan esa información se puede conseguir una ecuación de la forma  $y = mx + b$  que cumple con esas condiciones dadas. Nótese que la ecuación  $y = mx + b$  es la forma generalizada de la forma principal  $y = mx + n$ ; por lo tanto, la  $b$  corresponde al valor de  $n$  (el intercepto en la ordenada  $y$ ).

### Ejemplo 1:

Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente  $m = 3$  e intercepto  $b = 10$ .

Tenemos que hallar la ecuación de la recta, esto es,  $y = mx + b$ .

Usamos la información que tenemos:

$m = 3$  y  $b = 10$  y sustituimos en la ecuación

$$y = 3x + 10.$$

La ecuación que se pide es  $y = 3x + 10$ .

Nótese que esta forma principal (simplificada o explícita) también podemos expresarla como una ecuación general:

$y - 3x - 10 = 0$ , la cual amplificamos por  $-1$ , quedando como

$-y + 3x + 10 = 0$ , que luego ordenamos, para quedar

$$3x - y + 10 = 0$$

## Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(1, 2)$  y tiene pendiente  $m = -5$ .

Tenemos que hallar la ecuación de la recta, esto es,  $y = mx + b$ .

Usamos a información:  $m = -5$  y sustituimos en la ecuación:

$$y = -5x + b$$

Ahora tenemos que buscar la  $b$ ; usamos el otro dato; la recta pasa por el punto  $(1, 2)$ , por lo tanto, ese punto es una solución de la ecuación que buscamos. Se sustituyen esos valores de  $x = 1$ ,  $y = 2$  en la ecuación que estamos buscando:  $2 = -5(1) + b$

Despejamos la variable  $b$  en:

$$2 = -5(1) + b$$

$$2 = -5 + b$$

$$2 + 5 = b$$

$$b = 7$$

Sustituimos el valor de  $b$  en la ecuación que buscamos:  $y = -5x + 7$

La ecuación en su forma principal (simplificada o explícita) es  $y = -5x + 7$ .

La cual también podemos expresar en su forma general:

$$y = -5x + 7$$

$$y + 5x - 7 = 0$$

la cual ordenamos y queda

$$5x + y - 7 = 0$$

## 2.3.2 Pendiente de una Recta

Con respecto a la pendiente es necesario conocer los siguientes enunciados:

Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

Si una recta tiene pendiente  $m = -3$  y es paralela a otra, entonces esa otra también tiene pendiente  $m = -3$ .

Las rectas perpendiculares tienen pendientes recíprocas y opuestas.

Si una recta tiene pendiente  $m = -5$  y es perpendicular a otra, entonces esa otra tiene pendiente  $1/5$ .

Además:

Si  $m = 0$  la recta es horizontal (paralela al eje  $x$ ). Si  $n = 0$ , la recta es perpendicular. Si  $n = 0$  la recta pasa por el origen.

## Determinar la pendiente

Aprendido lo anterior es muy fácil hallar la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada, o para hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Si nos dicen, por ejemplo, que una recta tiene una pendiente de **2** y que pasa por el punto **(1, 3)**, sólo tenemos que sustituir estos valores en la ecuación principal y nos quedaría:

$$3 = 2 \cdot 1 + n,$$

y despejando  $n$ , queda  $n = 1$ .

Por lo tanto, la ecuación de esa recta será:

$$y = 2x + 1.$$

Si nos dicen que la recta pasa por el punto **(1, 3)** y **(2, 5)**, sólo tenemos que sustituir estos valores en la ecuación principal y obtendremos dos ecuaciones con dos incógnitas:

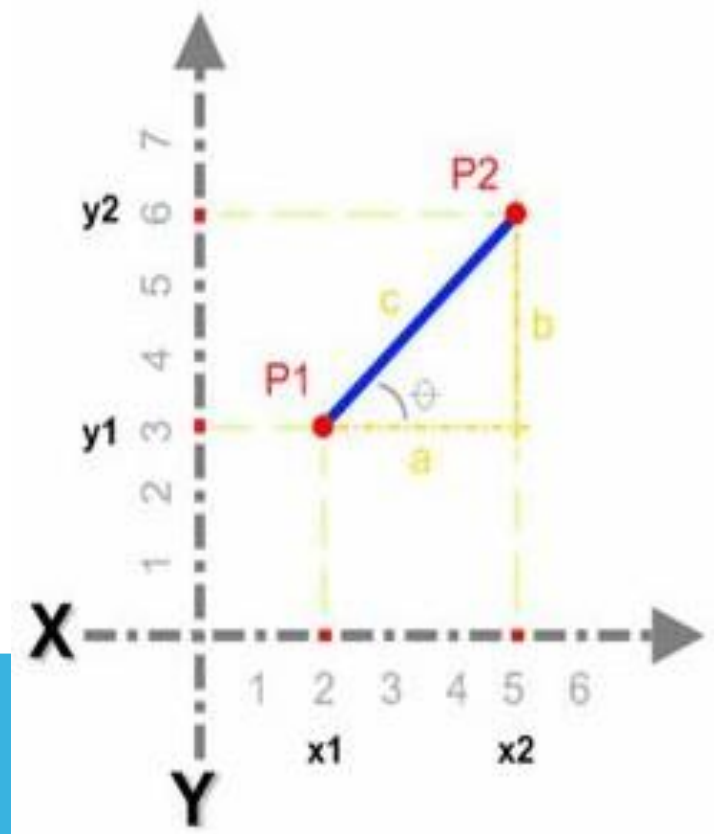
$$3 = m \cdot 1 + n,$$

$$5 = m \cdot 2 + n.$$

Ahora, observemos el gráfico de la derecha: Cuando se tienen dos puntos de una recta  $P_1$  ( $x_1, y_1$ ) y  $P_2$  ( $x_2, y_2$ ), la pendiente, **que es siempre constante**, queda determinada por el cociente entre la diferencia de las ordenadas de esos dos puntos y la diferencia de las abscisas de los mismos puntos, o sea, con la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Entonces, a partir de esta **fórmula de la pendiente** se puede también obtener la ecuación de la recta, con la fórmula:



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Esta forma de obtener la ecuación de una recta se suele utilizar cuando se conocen su pendiente y las coordenadas de uno solo de sus puntos.

Entonces, la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P_1 = (x_1, y_1)$  y tiene la pendiente dada  $m$ , se establece de la siguiente manera:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

## Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2, - 4) y que tiene una pendiente de  $- 1/3$

Al sustituir los datos en la ecuación, resulta lo siguiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-4) = - 1/3(x - 2)$$

$$3(y + 4) = -1(x - 2)$$

$$3y + 12 = -x + 2$$

$$3y + 12 + x - 2 = 0$$

$$3y + x + 10 = 0$$

$$x + 3y + 10 = 0$$

Volviendo a la ecuación general de la recta ( $Ax + By + C = 0$ ), en ella la pendiente ( $m$ ) y el coeficiente de posición ( $n$ ) quedan determinados por:

$$m = \frac{-A}{B}$$

$$n = \frac{-C}{B}$$

Ejemplo: ¿Cuál es la pendiente y el coeficiente de posición de la recta  $4x - 6y + 3 = 0$ ?

$$m = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$n = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$$

### 3. Ecuación de la circunferencia

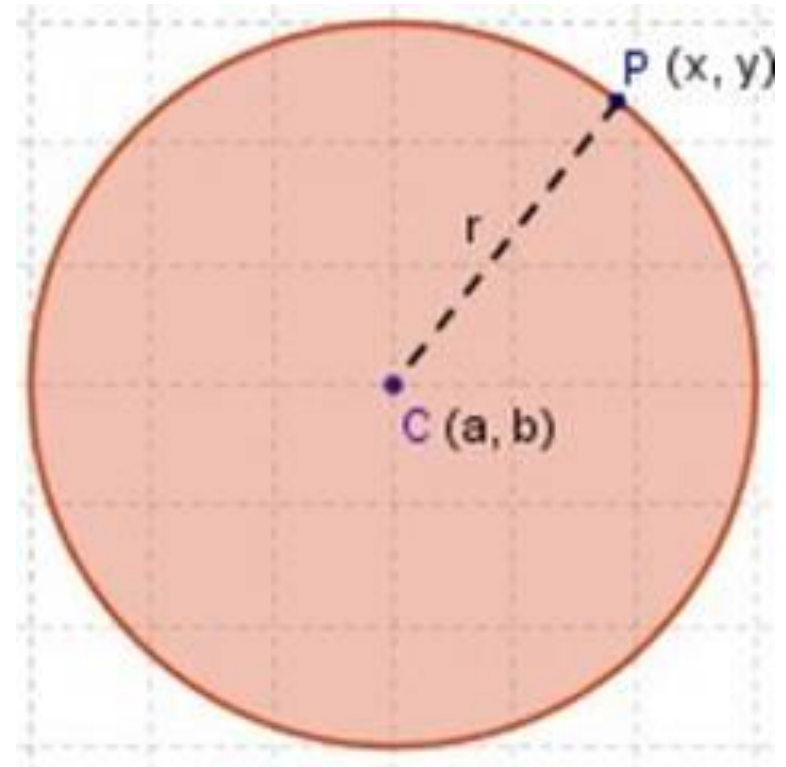
La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro (recordar que estamos hablando del Plano Cartesiano y es respecto a éste que trabajamos).

Una circunferencia queda determinada cuando conocemos:

Tres puntos de la misma, equidistantes del centro.

El centro y el radio.

El centro y un punto en ella.



El centro y una recta tangente a la circunferencia.

También podemos decir que la circunferencia es la línea formada por todos los puntos que están a la misma distancia de otro punto, llamado **centro**.

Esta propiedad es la clave para hallar la **expresión analítica** de una circunferencia (la **ecuación de la circunferencia**).

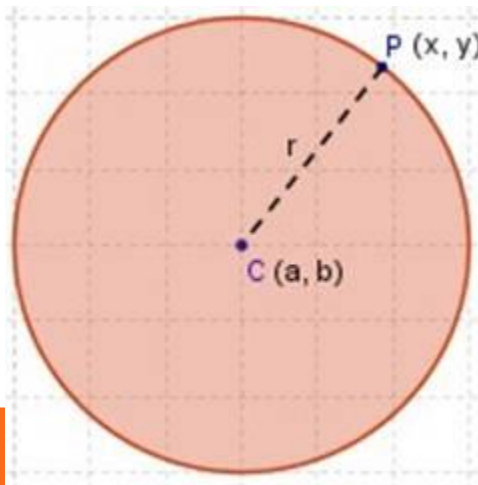
Entonces, entrando en el terreno de la Geometría Analítica, (dentro del Plano Cartesiano) diremos que —para cualquier punto, **P** (**x**, **y**), de una circunferencia cuyo centro es el punto **C** (**a**, **b**) y con radio **r**—, la ecuación ordinaria es

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

¿Qué significa esto?

En el contexto de la Geometría Analítica significa que una circunferencia graficada con un centro definido (coordenadas) en el Plano

Cartesiano y con radio conocido la podemos “ver” como gráfico y también la podemos “transformar” o expresar como una ecuación matemática.



**Donde:**

**(d) Distancia  $CP = r$**

**y**

Fórmula que elevada al cuadrado nos da

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

**También se usa como**

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

<https://www.youtube.com/watch?v=HGYMfv7OW1A>

### 3.1 De la ecuación ordinaria a la ecuación general

Si en esta ecuación ordinaria —cuyo primer miembro (lado izquierdo) está formado por la suma de dos cuadrados de binomio—, eliminamos los paréntesis desarrollando dichos binomios, pasamos todos los términos al primer miembro y la igualamos a cero, tendremos:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

ecuación que ordenada sería

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Si para tener una ecuación más sintetizada hacemos las siguientes asignaciones:

$$- 2a = D,$$

$$- 2b = E,$$

$$a^2 + b^2 - r^2 = F$$

a ecuación quedaría expresada de la forma:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$  conocida como Ecuación General de la Circunferencia, la cual debe cumplir las siguientes condiciones para serlo:

No existe término en  $xy$

Los coeficientes de  $x^2$  e  $y^2$  son iguales.

Si  $D = -2a$  entonces ecuación circunferencia  $a = \frac{-D}{2}$

Si  $E = -2b$  entonces ecuación circunferencia  $b = \frac{-E}{2}$

Si  $F = a^2 + b^2 - r^2$  entonces ecuación circunferencia  $r = \sqrt{a^2 + b^2 - F}$

Además, otra **condición necesaria** para que una ecuación dada represente una circunferencia es que:

$$a^2 + b^2 - F > 0 \quad (a^2 + b^2 - F \text{ debe ser mayor que cero})$$

## Ecuación reducida de la circunferencia

Volviendo a nuestra ecuación ordinaria  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , debemos consignar que si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas  $(0, 0)$  la ecuación queda reducida a:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$



# Obtener la ecuación de la circunferencia conocida su gráfica

Para lograrlo debemos conocer dos elementos importantes:

- el centro de la circunferencia (C), dado por sus coordenadas
- el radio (r) de la misma circunferencia

Definido esto, tendremos **dos posibilidades**:

A) Circunferencia con **centro (C)** en el origen de las coordenadas; expresado como **C (0, 0)**

B) Y circunferencia con **centro (C)** fuera del origen de las coordenadas; expresado, por ejemplo, como **C (3, 2)**.

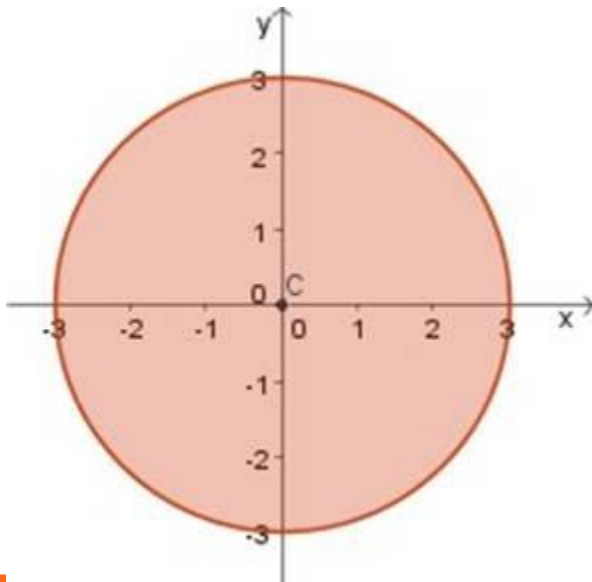


### 3.1 Circunferencia con centro (C) en el origen de las coordenadas; expresado como C (0, 0)

A continuación analizaremos cuatro casos

#### Caso 1

Veamos la gráfica siguiente:



Los datos que nos entrega son:

**Centro:** C (0, 0), el centro se ubica en el origen de las coordenadas x e y

**radio:**  $r = 3$ , lo indica el 3 en cada una de las coordenadas.

#### Recordar esto:

Cuando el centro (C) de la circunferencia sea (0, 0) se usará la ecuación  $x^2 + y^2 = r^2$  para expresar dicha circunferencia en forma analítica (Geometría analítica). Esta ecuación se conoce como ecuación reducida.

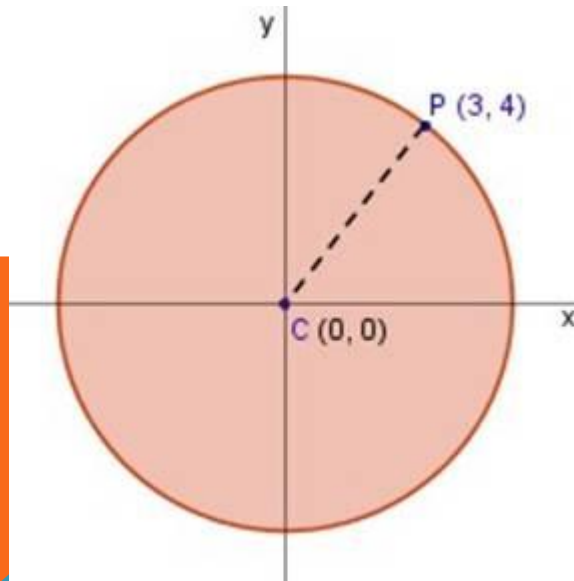
Para la gráfica de nuestro ejemplo, reemplazamos el valor de  $r$  en la fórmula  $x^2 + y^2 = 3^2$  y nos queda  $x^2 + y^2 = 9$  como la ecuación reducida de la circunferencia graficada arriba.

Ojo:

Si nos dieran la ecuación  $x^2 + y^2 = 9$  y nos preguntaran qué representa, razonamos en sentido inverso y diremos que representa una **circunferencia**, con **centro (C)** en el **origen de las coordenadas (0, 0)** y cuyo **radio es 3** ( $3^2 = 9$  y la raíz cuadrada de 9 es 3)

**Circunferencia con centro (C) en el origen de las coordenadas; expresado como C (0, 0)**  
**Caso 2**

Veamos la gráfica siguiente:



Los datos que nos entrega son:

**Centro: C (0, 0)**, el centro se ubica en el origen de las coordenadas x e y

**radio: r**, lo desconocemos, pero tenemos un dato: el punto **P (3, 4)** ubicado en la circunferencia.

Recordemos de nuevo:

Cuando el centro (C) de la circunferencia sea (0, 0) se usará la ecuación  $x^2 + y^2 = r^2$  para expresar dicha circunferencia en forma analítica. Esta ecuación se conoce como ecuación reducida.

Para la gráfica de nuestro ejemplo, deberíamos colocar el valor de r en la fórmula  $x^2 + y^2 = r^2$ , pero resulta que no lo conocemos.

Entonces, a partir del dato P (3, 4) podemos calcular el valor del trazo que une este punto con el centro C (0, 0) (trazo PC con línea punteada en la figura), el cual corresponde al radio de la circunferencia dada.

¿Cómo calculamos el valor de la distancia (d) entre P y C (el radio de la circunferencia)?

Para calcular la distancia (d) entre dos puntos (encontrar su valor) contamos con la siguiente fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

No olvidemos que esta fórmula es para encontrar o conocer la distancia entre dos puntos; por lo mismo, debemos saber que en ella

$(x_2 - x_1)^2$  representa al punto 1, y ese punto 1 ( $P_1$ ) lo haremos corresponder con el punto que pasa por el centro  $C(0, 0)$

$(y_2 - y_1)^2$  representa al punto 2, y ese punto 2 ( $P_2$ ) lo haremos corresponder con el punto que pasa por  $P(3, 4)$ .

Es muy importante conocer o designar este orden ya que

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ x_1, y_1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 3, 4 \\ x_2, y_2 \end{pmatrix}$$

Establecido este orden o equivalencia, podemos sustituir los valores en la fórmula anterior para conocer la distancia (d) entre los dos puntos que nos interesan, la cual será nuestro radio:

$$d = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2}$$

$$d = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$d = \sqrt{9 + 16}$$

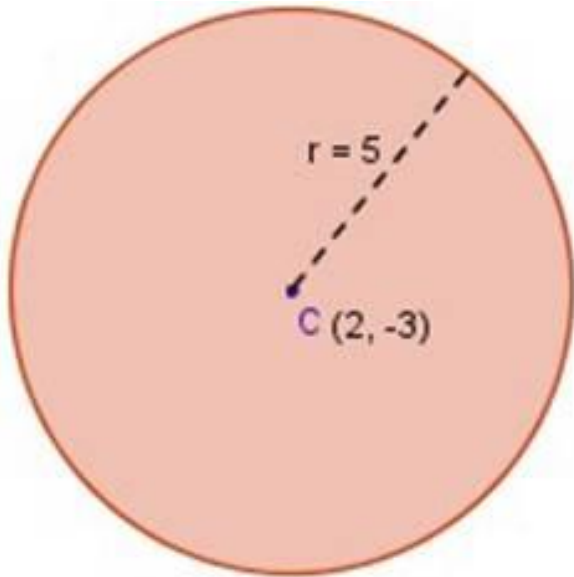
$$d = \sqrt{25}$$

$$d = 5$$

El 5 nos indica la distancia entre los dos puntos, el centro de la circunferencia y uno de sus puntos, lo cual corresponde al **radio**.

### 3.1 Obtener la Ecuación de la circunferencia con centro (C) fuera del origen de las coordenadas

Tomemos, por ejemplo, la circunferencia cuyo centro está dado por  $C(2, -3)$ , con radio  $r = 5$  que se muestra en la figura



Para obtener la **ecuación general de la circunferencia** que estamos viendo podemos usar dos métodos:

Método por desarrollo y

Método con las fórmulas conocidas.

## Método por desarrollo

Como conocemos el centro,  $C(2, -3)$  y el radio ( $r = 5$ ) entonces la fórmula ordinaria de la circunferencia será

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  donde  $a$  y  $b$  son las coordenadas del centro  $C(a, b)$ , que en nuestro caso corresponde a  $C(2, -3)$  entonces, nuestra **ecuación ordinaria** quedará como

$$(x - 2)^2 + (y - -3)^2 = 5^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

**Nota:** algunos usan otras letras, como  $(x - h)^2 + (y - k)^2$

Sigamos.

Tenemos nuestra ecuación ordinaria

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

y desarrollamos sus dos binomios:

$$(x - 2)(x - 2) + (y + 3)(y + 3) = 25$$

$$(x^2 - 2x - 2x + 4) + (y^2 + 3y + 3y + 9) = 25$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 25$$

Recordemos que la estructura de la ecuación general de la circunferencia es

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Entonces, ordenamos nuestra ecuación anterior y la acomodamos de acuerdo con la fórmula general:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + 9 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

que es la **ecuación general de la circunferencia** con centro en las coordenadas 2, -3 y cuyo radio es 5.

## Método con las fórmulas conocidas

Como conocemos el centro,  $C(2, -3)$  y el radio ( $r = 5$ ) entonces aplicamos las fórmulas

Si  $x = a$  entonces  $D = -2a$

Si  $y = b$  entonces  $E = -2b$

Si  $r = r$  entonces  $F = a^2 + b^2 - r^2$

Si recordamos que la estructura de la **ecuación general de la circunferencia** es

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

y en ella sustituimos los valores ahora conocidos de  $D$ ,  $E$  y  $F$ , tendremos

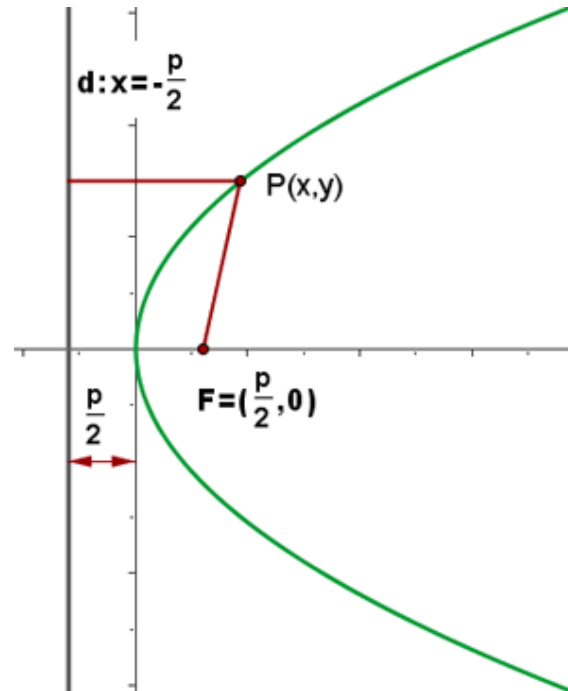
$$x^2 + y^2 + -4x + 6y + -12 = 0$$

$$x^2 + y^2 + -4x + 6y - 12 = 0$$

obtenemos la misma **ecuación general de la circunferencia** que logramos mediante el **método del desarrollo**.

## 3.2 LA PARÁBOLA

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.



## Elementos de la parábola:

**1Foco:** Es el punto fijo  $F$ .

**2Directriz:** Es la recta fija  $d$ .

**3Parámetro:** Es la distancia del foco a la directriz, se designa por la letra  $p$ .

**4Eje:** Es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.

**5Vértice:** Es el punto de intersección de la parábola con su eje.

**6Radio vector:** Es un segmento que une un punto cualquiera de la parábola con el foco.



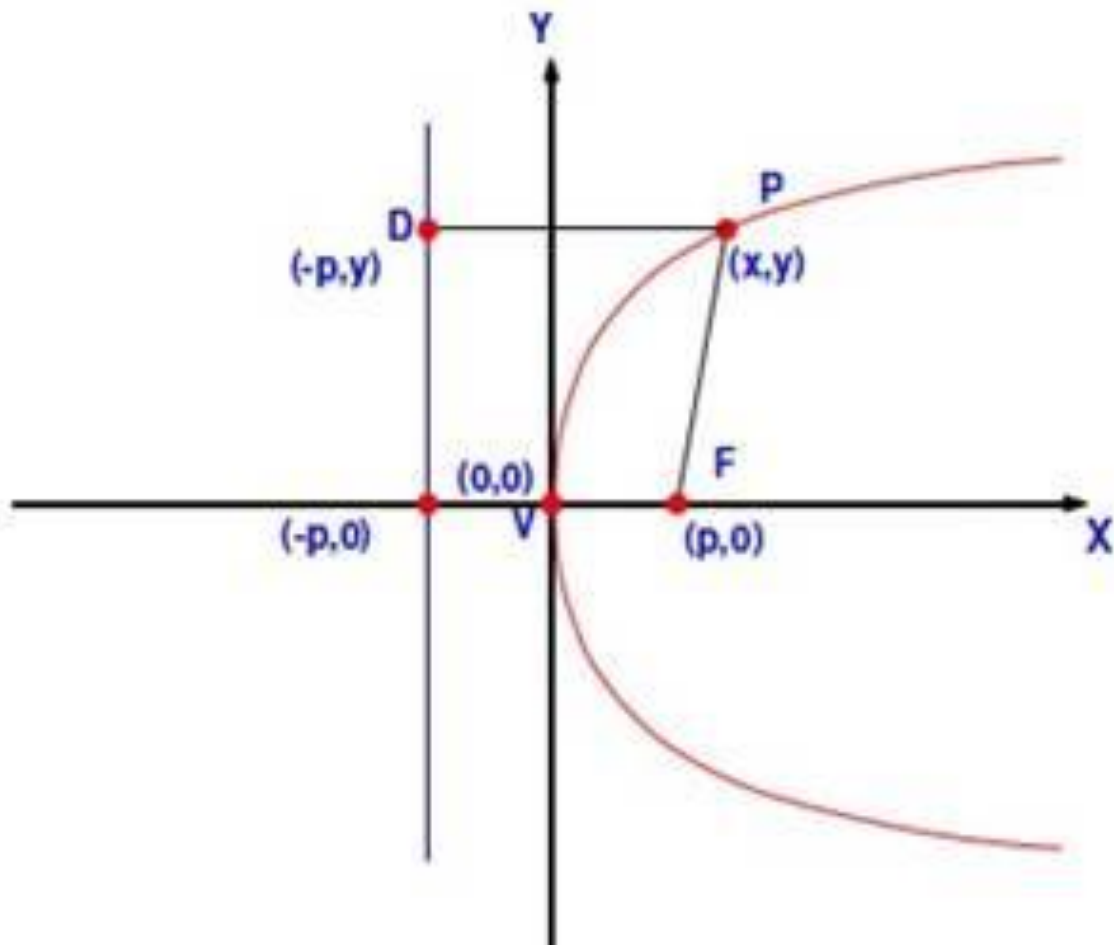
### 3.2.1 Ecuaciones de la parábola con vértice en el origen

Primeramente, estudiaremos la **ecuación de la parábola** para los casos en que su vértice esté en el origen (**coordenadas (0, 0)** del **Plano Cartesiano**), y según esto, tenemos cuatro posibilidades de ecuación y cada una es característica.

Para iniciar nuestra explicación empezaremos con la parábola cuyo vértice está en el origen, su eje focal o de simetría coincide con el eje de las X (abscisas) y que está orientada (se abre) hacia la derecha.

Por definición, sabemos que, en una parábola la distancia entre un **punto “P”** (no confundir con el **“parámetro p”**), cualquiera de coordenadas  $(x, y)$ , y el foco **“F”** será igual a la distancia entre la directriz (D) y dicho punto, como vemos en la figura:





De lo anterior resulta:

$$\overline{PD} = \overline{PF} \quad (\text{trazo PD igual al trazo PF})$$

El trazo PD nace en el punto  $(x, y)$  y termina en el punto  $(-p, y)$  y podemos usar la fórmula para calcular **distancia entre dos puntos**:

$$\overline{PD} = \sqrt{(x - (-p))^2 + (y - y)^2}$$

$$\overline{PD} = \sqrt{(x + p)^2}$$

El trazo PF nace en el punto  $(x, y)$  y termina en el punto  $(p, 0)$ , y también podemos usar la fórmula para calcular la distancia entre ellos:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2}$$

$$\overline{PF} = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

Sustituyendo en la expresión de distancias  $\overline{PD} = \overline{PF}$  resulta:

$$\sqrt{(x + p)^2} = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

Elevando ambos miembros de la ecuación al cuadrado y desarrollando, se tiene:

$$(x + p)^2 = (x - p)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2$$

$$x^2 + 2px + p^2 - x^2 + 2px - p^2 = y^2$$

Simplificando términos semejantes y reordenando la expresión, se obtiene:

$$y^2 = 4px$$

que es ecuación de la parábola en su forma ordinaria o canónica.

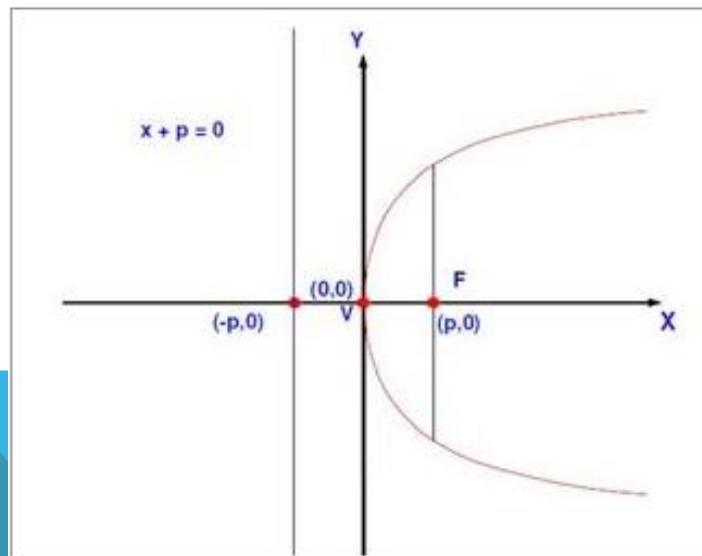
Esta ecuación tiene algunas variaciones según sea la orientación de la parábola (hacia donde se abre).

Veamos ahora las cuatro posibilidades:

### Primera posibilidad

La que ya vimos, cuando la **parábola se abre hacia la derecha (sentido positivo) en el eje de las abscisas "X"**

Ecuación de la parábola	$y^2 = 4px$
Ecuación de la directriz	$x + p = 0$

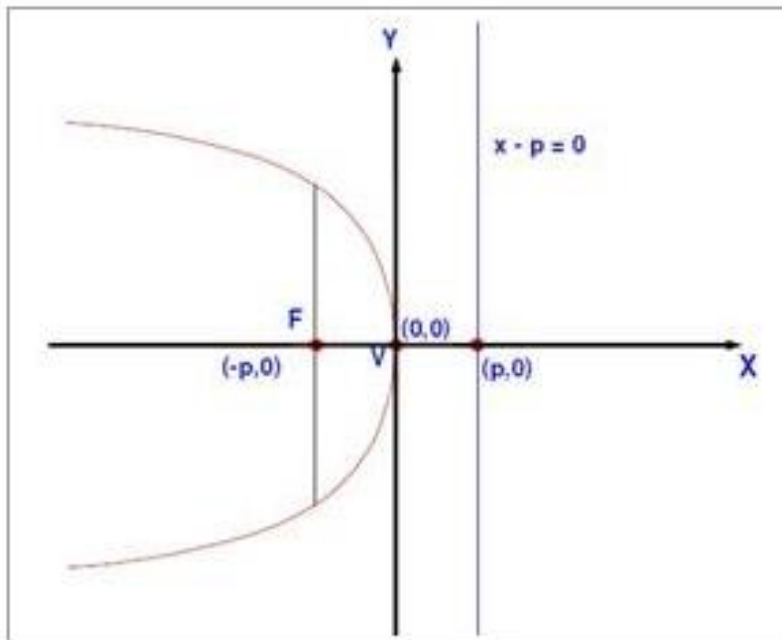


## Segunda posibilidad

Cuando la parábola se abre hacia la izquierda (sentido negativo) del eje de las abscisas "X".

Ecuación de la parábola  $y^2 = -4px$

Ecuación de la directriz  $x - p = 0$

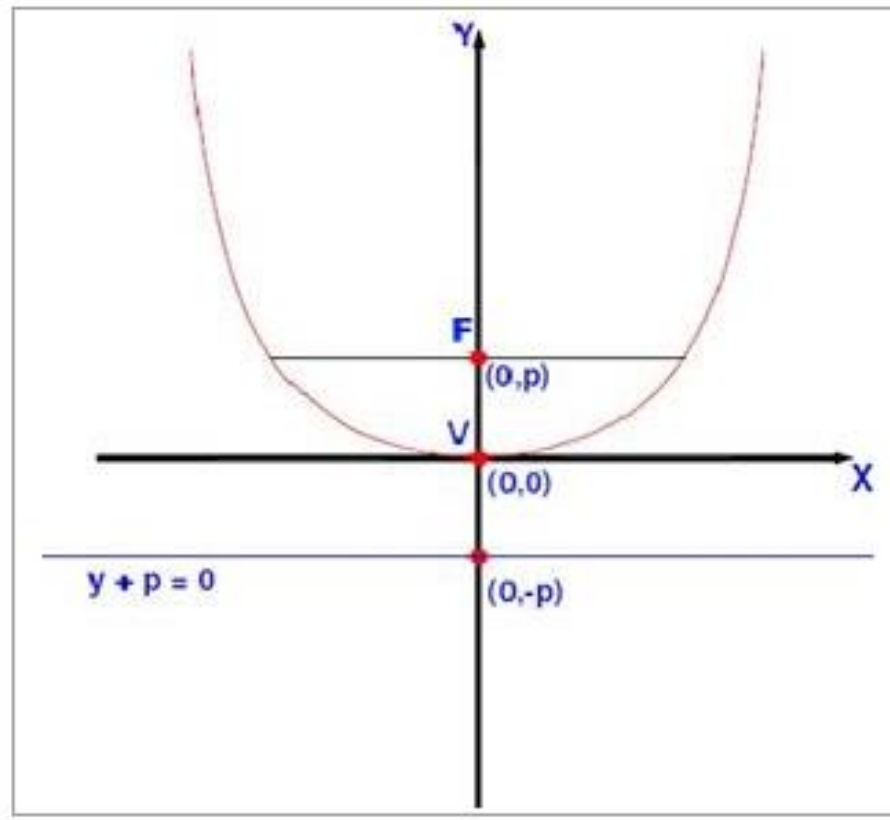


### Tercera posibilidad

Cuando la parábola se abre hacia arriba (sentido positivo) en el eje de las ordenadas "Y".

Ecuación de la parábola  $x^2 = 4py$

Ecuación de la directriz  $y + p = 0$

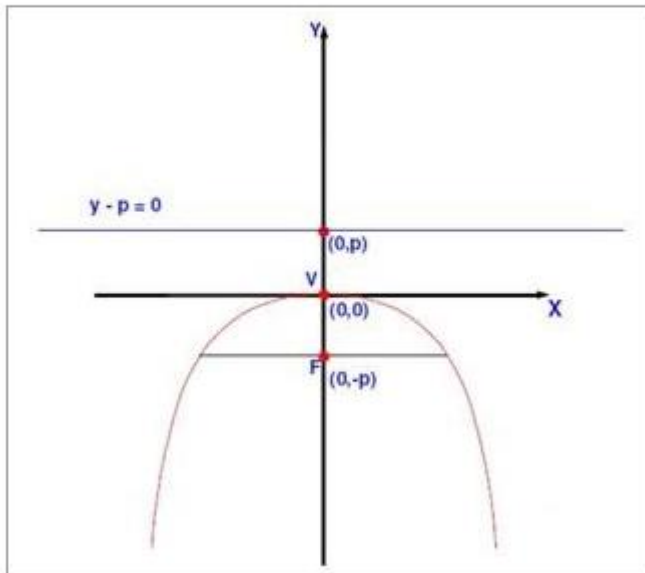


## Cuarta posibilidad

Cuando la parábola se abre hacia abajo (sentido negativo) en el eje de las ordenadas “Y”.

Ecuación de la parábola  $x^2 = -4py$

Ecuación de la directriz  $y - p = 0$



## Información importante:

El **parámetro  $p$**  (que marca la distancia focal) señala la distancia entre el **foco** y el **vértice**, que es igual a la distancia entre el **vértice** y la **directriz**.

Si en la ecuación de la parábola la **incógnita  $x$  es la elevada al cuadrado**, significa que la curvatura de la misma se abre hacia arriba o hacia abajo, dependiendo del signo del **parámetro  $p$** .

Cuando el **parámetro  $p$  es positivo**, la parábola **se abre “hacia arriba”** y cuando es **negativo se abre “hacia abajo”**.

Ahora, si en la ecuación de la parábola la **incógnita  $y$  es la elevada al cuadrado**, la curvatura de la misma será hacia la derecha o hacia la izquierda. En este caso, cuando el **parámetro  $p$  es positivo**, la parábola **se abre “hacia la derecha”** y cuando es **negativo se abre “hacia la izquierda”**.



## Longitud del lado recto (LR)

Tal como dedujimos la ecuación anterior, es posible deducir la ecuación que nos permita calcular la longitud del lado recto (cuerda que pasa por el foco, perpendicular al eje focal o de simetría):

No desarrollaremos el camino y sólo diremos, para recordar, que el **lado recto es igual a  $4p$** .

### Ejemplo:

Obtener la **ecuación, el foco y la directriz** de la parábola con vértice en el origen y que contiene al punto  $B(3, 4)$ , además su eje de simetría (o eje focal) es paralelo al eje  $X$ .

### Resolución:

El punto  $B(3, 4)$  nos indica que

$$X = 3$$

$$Y = 4$$

Sustituyendo las coordenadas del punto B en la ecuación

$$y^2 = 4px$$

$$4^2 = 4p(3)$$

$$16 = 12p$$

$$p = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Entonces la ecuación será

$$y^2 = 4\left(\frac{4}{3}\right)x$$

$$y^2 = \frac{16}{3}x$$

Y el Foco estará en el punto  $4/3, 0$

$$F = \left( \frac{4}{3}, 0 \right)$$

Vemos que  $4/3$  corresponde al valor de  $p$ , y como la directriz está a la misma distancia de  $p$  respecto al vértice, pero hacia el lado contrario, entonces, la directriz será:

$$x = -\frac{4}{3}$$

**Fuentes Internet:**

<http://dcb.fi-c.unam.mx/cerafin/bancorec/capsulasmaticas/parabola.pdf>

<http://matematica1.com/category/conversion-de-la-forma-general-a-la-ordinaria-en-una-parabola/>

### 3.2.2 Ecuación de la parábola cuyo vértice no está en el origen

Ahora analizaremos los casos en que se puede obtener la ecuación que describe una parábola cuyo vértice no coincide con el origen del sistema de ejes coordenados.

Cuando el vértice de la parábola se localiza en cualquier punto, por convención ubicado en las **coordenadas**  $(h, k)$ , y distinto al origen, la ecuación que describe a la parábola cambia en función de la posición de este punto y de la orientación de apertura respecto de los ejes  $x$  e  $y$ .

Debido a estas características, también tenemos cuatro posibilidades de ecuaciones de parábolas cuyo vértice está fuera del origen del sistema de ejes coordenados.

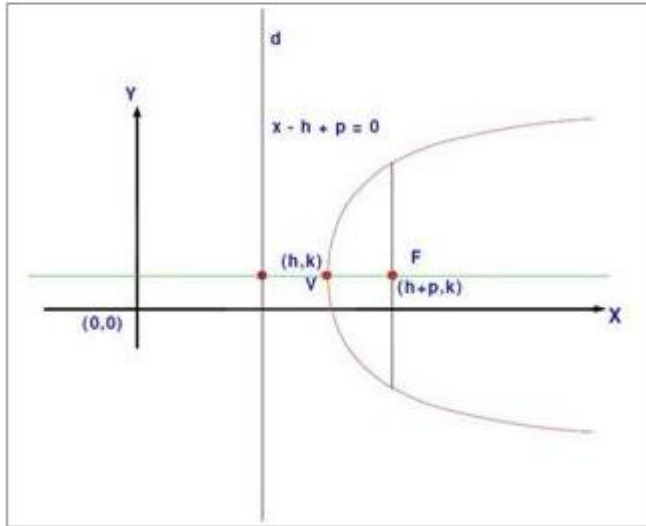


## Primera posibilidad

Que la parábola se abra hacia la derecha  
(sentido positivo) en el eje de las abscisas  
“X”.

Ecuación de la parábola  $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

Ecuación de la directriz  $x - h + p = 0$

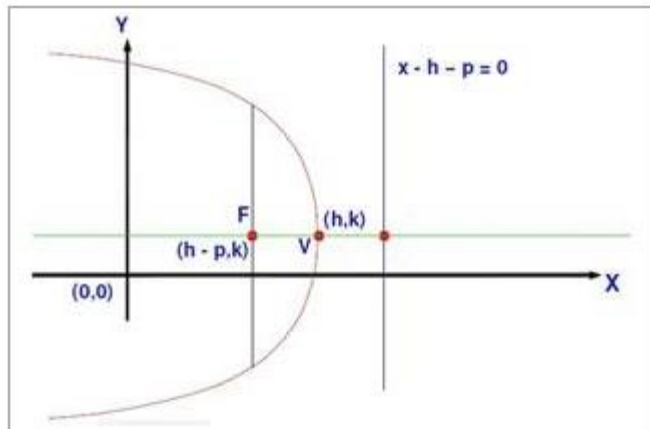


## Segunda posibilidad

Que la parábola se abra hacia la izquierda  
(sentido negativo) del eje de las abscisas “X”.

Ecuación de la parábola  $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

Ecuación de la directriz  $x - h - p = 0$

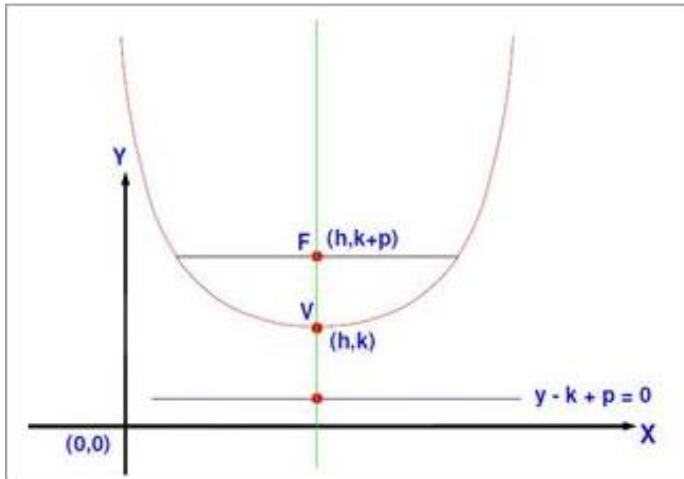


### Tercera posibilidad

Que la parábola se abra hacia arriba (sentido positivo) del eje de las ordenadas “Y”

Ecuación de la parábola  $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

Ecuación de la directriz  $y - k + p = 0$

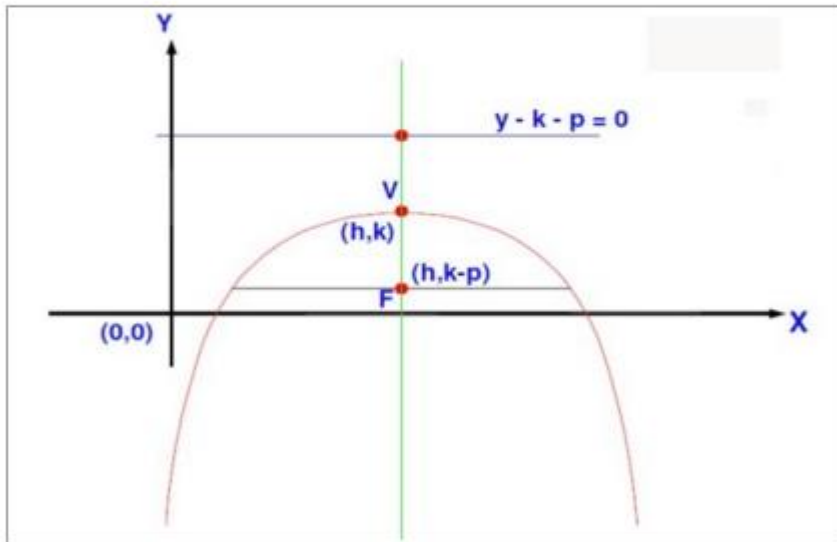


## Cuarta posibilidad

Que la parábola se abra hacia abajo (sentido negativo) del eje de las ordenadas “Y”.

Ecuación de la parábola  $(x - h)^2 = -4p(y - k)$

Ecuación de la directriz  $y - k - p = 0$



## Ejemplo 1:

Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el punto (3, 2) y foco en (5, 2).

### Desarrollo

Al analizar las coordenadas de vértice (3, 2) y foco (5, 2), vemos que su ordenada es común ( $y = 2$ ), por lo que se concluye que están alineados horizontalmente y que el foco está a la derecha del vértice.

Según ya vimos, en este caso la ecuación que resulte tiene la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Siendo las coordenadas del vértice (h, k), se sustituyen en la ecuación y resulta:

$$(y - 2)^2 = 4p(x - 3)$$

En donde el **parámetro p** representa la distancia del vértice al foco, que podemos calcular por diferencia de las abscisas correspondientes:

$$p = 5 - 3$$

$$p = 2$$

Sustituyendo:

$$(y - 2)^2 = 4(2)(x - 3)$$

Queda

$$(y - 2)^2 = 8(x - 3),$$

ecuación escrita en la forma ordinaria o canónica.

## Ejemplo 2

Determine las coordenadas del vértice (V), del foco (F), la longitud del lado recto (LR) y la ecuación de la directriz (D), en una parábola cuya ecuación ordinaria o canónica es  $(x + 6)^2 = -24(y - 2)$

## Desarrollo

Estando la  $x$  al cuadrado en  $(x + 6)^2$  y siendo negativo el término  $-24$  sabemos de inmediato que la parábola representada en la ecuación es vertical y se abre hacia abajo (sentido negativo de las ordenadas).

Por lo tanto, la forma de dicha ecuación será:  $(x - h)^2 = -4p(y - k)$

Ahora, si las coordenadas del vértice corresponden con los valores de  $h$  y  $k$   $(+6, -2)$ , y los reemplazamos en la ecuación dada

$$(x - h)^2 = -4p(y - k)$$

Tendremos

$$(x - (+6))^2 = -4p(y - (-2))$$

$$(x - \overset{h}{\cancel{6}})^2 = -4p(y - \overset{k}{\cancel{-2}})$$

Que nos entrega las coordenadas del vértice

$$V = (-6, 2)$$

Además, los datos nos indican que

$$-4p = -24$$

Lo cual significa que la longitud del lado recto (LR) es  $-24$  y por lo tanto

$$-4p = -24$$

$$p = \frac{-24}{-4}$$

$$p = 6$$

Entonces la distancia focal es 6 (igual a  $p$ ).

Las coordenadas del foco se obtienen por la abscisa del vértice ( $-6$ ) y por la diferencia (la resta) entre la ordenada del vértice ( $2$ ) y la distancia focal ( $6$ ):

$$F = (-6, 2 - 6)$$

$$F = (-6, -4)$$

Para determinar ecuación de la directriz se sustituyen los datos conocidos  $p$  y  $k$  en:

$$y - k - p = 0$$

$$y - 2 - 6 = 0$$

Resolviendo la ecuación queda:

$$y - 8 = 0$$

$$y = 8$$

### 3.2.3 ECUACION EN SU FORMA GENERAL

En todos los casos, la estructura de la **ecuación de la parábola** tiene las siguientes características:

Existe solamente una variable al cuadrado ( $x^2$  o bien  $y^2$ ) y otra lineal.

El coeficiente de la **variable lineal** ( $4p$ ) (el coeficiente es el 4) representa la proporción del **lado recto** con respecto de la **distancia focal** (debemos recordar que la distancia focal es la distancia entre el foco y el vértice).

Pero además de lo anterior, desde el punto de vista de las estructuras algebraicas, la ecuación de la parábola es una ecuación de segundo grado, que puede expresarse en la **forma general de ecuaciones** de este tipo.

## Obtención de la ecuación general de la parábola

Para llegar a dicha expresión o forma general, es necesario **desarrollar algebraicamente** la forma ordinaria o canónica de la ecuación.

Tomando como ejemplo la forma:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Desarrollando resulta:

$$x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4pk$$

$$x^2 - 2hx + h^2 - 4py + 4pk = 0$$

Multiplicando la ecuación por un **coeficiente "A"** con la intención de generalizar, y considerando  **$A \neq 0$** , tendremos:



$$Ax^2 - 2Ahx + Ah^2 - 4Apy + 4Apk = 0$$

Reordenando:

$$Ax^2 - 4Apy - 2Ahx - Ah^2 + 4Apk = 0$$

$$Ax^2 - 4Apy - 2Ahx + A(h^2 + 4pk) = 0$$

Haciendo que los coeficientes de las variables sean:

$$-4Ap = B$$

$$-2Ah = C$$

$$A(h^2 + 4pk) = D$$

Sustituyendo los coeficientes B, C y D en la ecuación, nos queda

$$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$$

que es la ecuación de una parábola horizontal en su forma general.

Análogamente, para una parábola de orientación vertical, la ecuación en su forma general será:

$$Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$$

## Ejemplo I

Una parábola tiene vértice en el **punto  $(-4, 2)$** , y su **directriz es  $y = 5$** , encuentre su ecuación y exprésela en la forma general.

### Desarrollo

Analizando las coordenadas del vértice y la posición de la directriz, se puede concluir que:

- a) La directriz es paralela al eje de las abscisas, por lo tanto la posición de la parábola es vertical.
- b) La directriz corta al eje de las ordenadas en un valor (5) mayor que la ordenada del vértice (2), por lo tanto la parábola se abre hacia abajo (sentido negativo del eje de las Y).
- c) Las coordenadas del vértice no corresponden con las del origen.
- d) Dado lo anterior, se trata entonces de una parábola cuya **ecuación ordinaria o canónica** es del tipo:

$$(x - h)^2 = -4p(y - k)$$

De las coordenadas del vértice se obtiene:

$$h = -4$$

$$k = 2$$

Se obtiene  $p$  por diferencia entre las ordenadas del vértice y de la directriz, resultando:

$$p = 5 - 2$$

$$p = 3$$

Sustituyendo valores en la ecuación ordinaria, resulta:

$$(x - h)^2 = -4p(y - k)$$

$$(x - (-4))^2 = -4(3)(y - (+2))$$

$$(x + 4)^2 = -12(y - 2)$$

$$(x + 4)^2 = -12y + 24$$

Desarrollando el binomio al cuadrado

$$(x + 4)(x + 4) = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 + 8x + 16 = +12y - 24$$

Simplificando e igualando a cero la ecuación se tiene:

$$x^2 + 8x + 16 + 12y - 24 = 0$$

$$x^2 + 8x + 12y - 8 = 0$$

Que es la ecuación buscada.

**Calcular los parámetros de la parábola si nos dan su ecuación general.**

**Reducción de la ecuación de una parábola**

Dada una ecuación del tipo

$$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$$

o del tipo

$$Ay^2 + Bx + Cy + D = 0,$$

siempre es posible **reducir la ecuación de una parábola**. Para ello se completa un cuadrado y se manipula adecuadamente el otro miembro.

## Ejemplo II

Dada la ecuación de la parábola

$$y^2 + 8y - 6x + 4 = 0,$$

encuentre las coordenadas del vértice y del foco, así como la ecuación de su directriz.

**Una forma de obtener los elementos solicitados consiste en reducir la ecuación general anterior llevándola a la forma ordinaria o canónica.**

Como primer paso, se separan a diferentes miembros la variable al cuadrado ( $y^2$ ) y la variable lineal ( $6x$ ) junto con el término independiente ( $-4$ )

$$y^2 + 8y = 6x - 4$$

Con la intención de factorizar se procede a la adición (en ambos miembros de la ecuación) de un término adecuado para que se complete el **trinomio cuadrado perfecto**:

En este caso ese número es 16, que se obtiene dividiendo a la mitad el **valor numérico del factor lineal (el 8 de 8y)** y el resultado elevado al cuadrado:

$$8/2 = 4 \quad \text{y} \quad 4^2 = 16 \quad (\text{8 dividido 2 es igual a 4 y 4 al cuadrado es 16})$$

Y 16 lo sumamos a ambos lados de la ecuación:

$$y^2 + 8y + 16 = 6x - 4 + 16$$

Simplificando:

$$y^2 + 8y + 16 = 6x + 12$$

Factorizando resulta:

El trinomio cuadrado  $y^2 + 8y + 16$  que se convierte en cuadrado de binomio  $(y + 4)^2$

$$y^2 + 8y + 16 = (y + 4)^2$$

Y el segundo miembro queda

$$6x + 12 = 6(x + 2)$$

Entonces, la ecuación queda así:

$$(y + 4)^2 = 6(x + 2)$$

Que es la ecuación ordinaria de una parábola con vértice fuera del origen, horizontal, y que se abre hacia la derecha, en el sentido positivo del eje de las abscisas, según lo visto anteriormente.

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Con lo cual se puede determinar que:

$$k = -4$$

$$h = -2$$

Por lo tanto, el vértice tiene las coordenadas  $V(-2, -4)$

Además:

$$\text{Si } 4p = 6$$

Entonces

$$p = 6/4 = 3/2$$

Considerando la orientación ya señalada de la parábola y el valor de  $p$ , es posible determinar la posición del foco, ya que éste estará alineado a la derecha del vértice a una distancia  $p$  desde  $h$ , y con la misma ordenada  $k$ , resultando:

$$F(h + p, k)$$

$$F(-2 + 3/2, -4)$$

$$F(-1/2, -4)$$

La ecuación de la directriz se obtiene de  $x - h + p = 0$

Resultando:

$$x - (-2) + (3/2) = 0$$

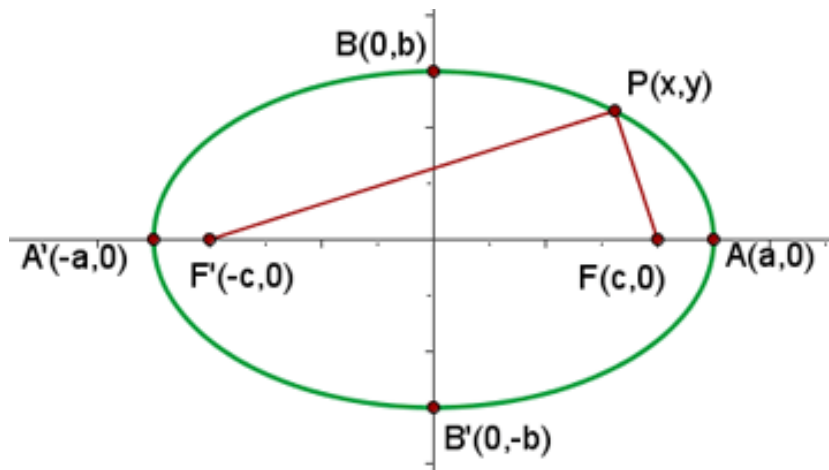
$$x + 4/2 + 3/2 = 0$$

$$x + 7/2 = 0$$

$$x = -7/2$$

### 3.3 ELIPSE

La **elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.



$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$$

## Elementos de la elipse

### Focos

Son los puntos fijos **F** y **F'**.

### Eje focal

Es la recta que pasa por los focos.

### Eje secundario


Es la mediatriz del segmento  $FF'$ .

### Centro

Es el punto de intersección de los ejes.

### Radios vectores

Son los segmentos que van desde un punto de la elipse a los focos: **PF** y **PF'**.



## Distancia focal

Es el segmento  $\overline{FF'}$  de longitud  $2c$ ,  $c$  es el valor de la **semidistancia focal**.

## Vértices

Son los puntos de intersección de la elipse con los ejes: A, A', B y B'.

## Eje mayor

Es el segmento  $\overline{AA'}$  de longitud  $2a$ ,  $a$  es el valor del **semieje mayor**.

## Eje menor

Es el segmento  $\overline{BB'}$  de longitud  $2b$ ,  $b$  es el valor del **semieje menor**.

## Ejes de simetría

Son las rectas que contienen al eje mayor o al eje menor.

