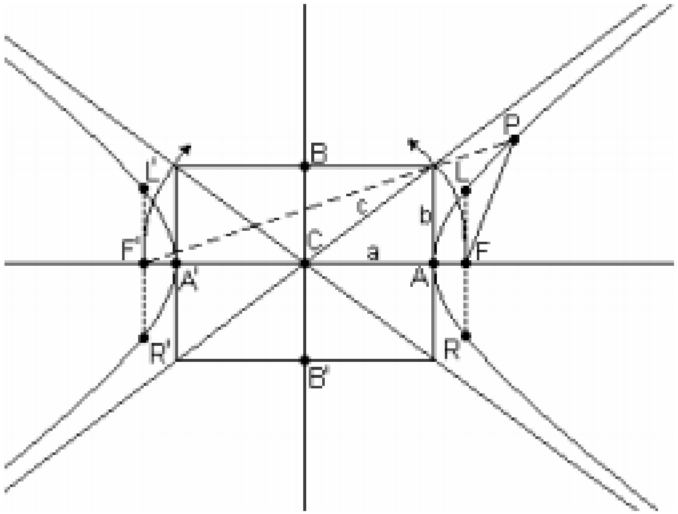
GUÍA DE TEMAS SELECTOS DE MATEMATICAS 1

1.HIPÉRBOLA

<u>Definición</u>

La hipérbola es el lugar geométrico descrito por un punto "P" que se mueve en el plano de tal modo que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano F' y F (llamados focos), es siempre una cantidad constante $2a$.

Esto es $|PF' - PF| = 2a$



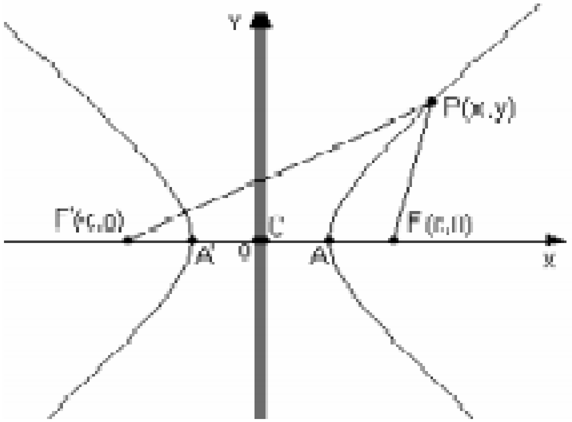
NOTACIONES

La hipérbola consta de dos ramas diferentes y de longitud infinita, en donde:

- $AA' = 2a$, eje focal o eje transverso (o eje real).
- $FF' = 2c$, distancia focal.
- $BB' = 2b$, eje conjugado (o eje imaginario).
- El punto medio de FF' es el centro C de la hipérbola.
- $CA' = CA = a$; $CB' = CB = b$; $CF' = CF = c$.
- Para que haya hipérbola es necesario que $c > a$.
- La cuerda que pasa por un foco y es perpendicular al eje focal se llama lado recto (LR) o ancho focal.

1.1 FORMA ORDINARIA DE LA ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL SOBRE ALGUNO DE LOS EJES COORDENADOS

Consideremos una hipérbola con "a" y "c" conocidos, ubicada en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, cuyo centro coincide con el origen de coordenadas $C(0,0)$, sus focos están sobre el eje "x" cuyas coordenadas son $F'(-c,0)$ y $F(c,0)$ y sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de la hipérbola (que puede estar sobre la rama izquierda o sobre la derecha sin que esto altere la definición de hipérbola) ubicado sobre la rama derecha como se muestra en la figura y que de acuerdo con la definición este punto P estará situado en la hipérbola dada si y solo si $PF'-PF=2a$, expresándola analíticamente:



si $PF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$; $PF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Aislando el primer radical en el primer miembro, elevando al cuadrado, haciendo operaciones y reduciendo términos semejantes se tiene:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado y reduciendo términos semejantes:

$$(cx - a^2)^2 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right]$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

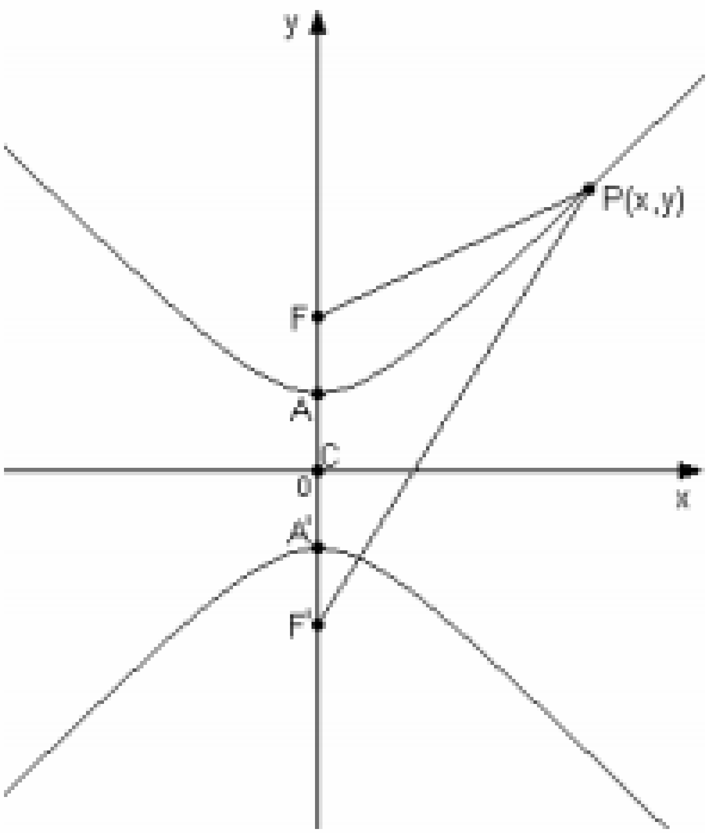
$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

factorizando: $(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

la relación entre a, b y c por el teorema de Pitágoras es $c^2 = a^2 + b^2$, despejando $b^2 = c^2 - a^2$ y sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

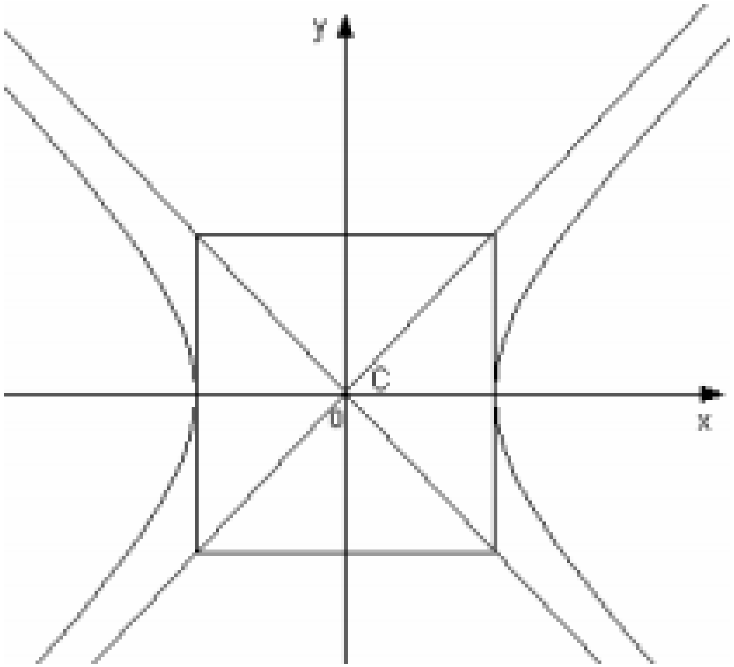
dividiendo entre a^2b^2: $\frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$; $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ ...(I)

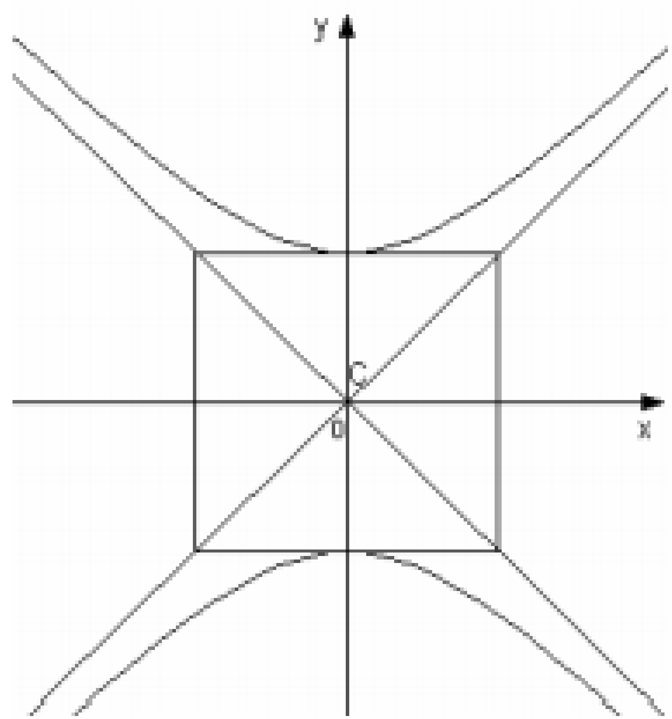


Con las mismas condiciones anteriores, pero con el eje focal coincidiendo con el eje "y", procediendo analíticamente en la misma forma se obtiene la ecuación $\boxed{\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1}$ ...(II) que es la FORMA ORDINARIA de la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal sobre el eje y.

La ecuaciones (I) y (II) contienen sólo potencias pares en las variables x y y, la hipérbola que determinan cada una de ellas es SIMÉTRICA respecto a cada uno de los ejes coordenados y al origen, por lo que al bosquejar su gráfica es suficiente considerar solamente la parte que está situada en el primer cuadrante y aprovechando su simetría se puede completar el bosquejo de su gráfica.

- Si en las ecuaciones (I) y (II), los semiejes a y b son iguales ($a = b$), las hipérbolas resultantes se llaman EQUILATERAS, ya que el rectángulo principal de la hipérbola equilátera es un cuadrado y por lo tanto sus asíntotas son perpendiculares entre sí.





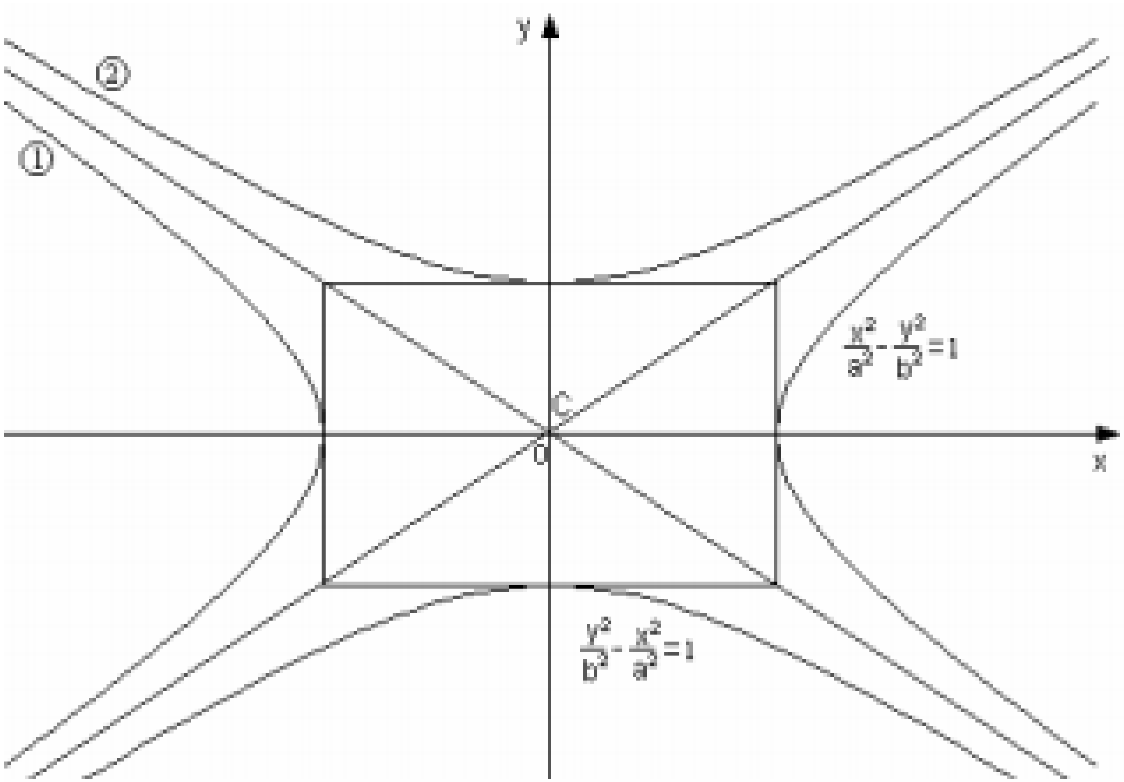
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

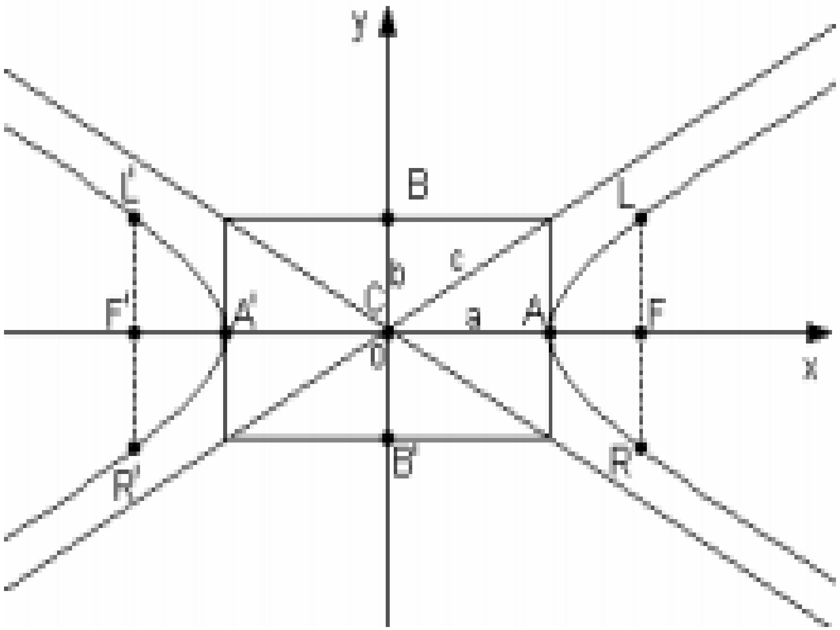
o bien $x^2 - y^2 = a^2$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

o bien $y^2 - x^2 = a^2$

- Dos hipérbolas en un mismo sistema de coordenadas con ecuaciones $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ se llaman hipérbolas <u>CONJUGADAS</u> entre si.





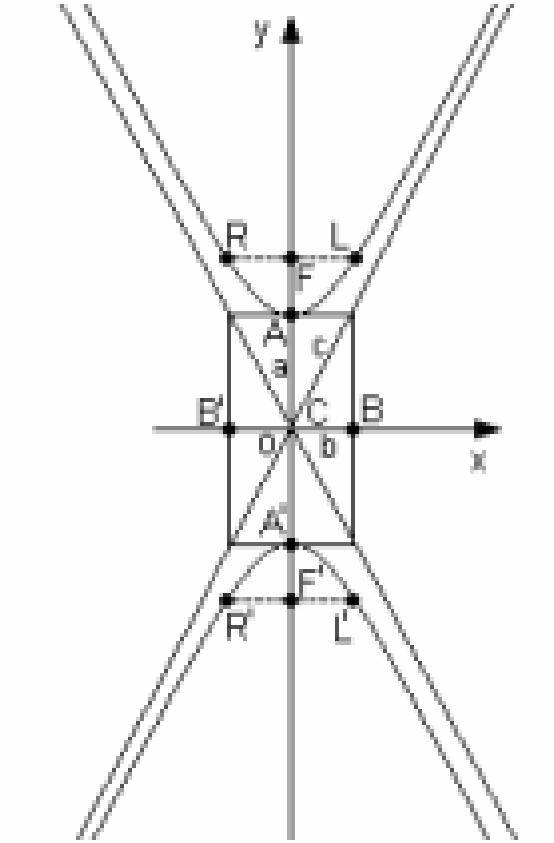
Los <u>ELEMENTOS</u> de la hipérbola referidos al sistema de coordenadas x, y son:

- Si la hipérbola es horizontal: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; $C(0,0)$; $A(a,0)$; $B(0,b)$; $F(c,0)$, para determinar las coordenadas de L, despejamos "y" de la ecuación (I): $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, haciendo $x=c$ se tiene

$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{c^2-a^2}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2}=\pm\frac{b^2}{a}$; $y=\frac{b^2}{a}$ es para $L\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$; $y=-\frac{b^2}{a}$ es para $R\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$. Por simetría de la hipérbola se tiene: $A'(-a,0)$; $B'(0,-b)$; $F'(-c,0)$ $L'\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$; $R\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$; Ecuación de las asíntotas: $y=\frac{b}{a}x$; $y=-\frac{b}{a}x$.

Ecuación del eje focal (transverso): $y=0$ (eje x).

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}$



- Si la hipérbola es vertical: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$; $C(0,0)$;

  $A(0,a)$ $B(b,0)$; $F(0,c)$; $L\left(\frac{b^2}{a},c\right)$

  Por simetría: $A'(0,-a)$; $B'(-b,0)$; $F'(0,-c)$;

  $L'\left(\frac{b^2}{a},-c\right)$ $R\left(-\frac{b^2}{a},c\right)$; $R'\left(-\frac{b^2}{a},-c\right)$

  Ecuación asíntotas: $y=\frac{a}{b}x$; $y=-\frac{a}{b}x$.

  Ecuación del eje focal: $x=0$ (eje y).

  Ecuación del eje conjugado: $y=0$ (eje x).

  Excentricidad: $e=\frac{c}{a}$

La <u>EXCENTRICIDAD</u> de la hipérbola es una característica de la forma de su rectángulo principal y por consiguiente de la forma de la misma hipérbola, quedando determinada por la relación de la distancia entre los focos de la hipérbola FF' a la distancia entre sus vértices $A'A$, quedando indicada por $e=\frac{c}{a}$, como en la hipérbola $c>a$, se tiene que esta relación siempre es mayor que uno o sea que $e>1$, cuanto más cercano es a uno esta valor, será más alargado su rectángulo principal en dirección de su eje focal, en el caso de la hipérbola equilátera, esta relación es $e=\sqrt{2}$.

EJEMPLOS

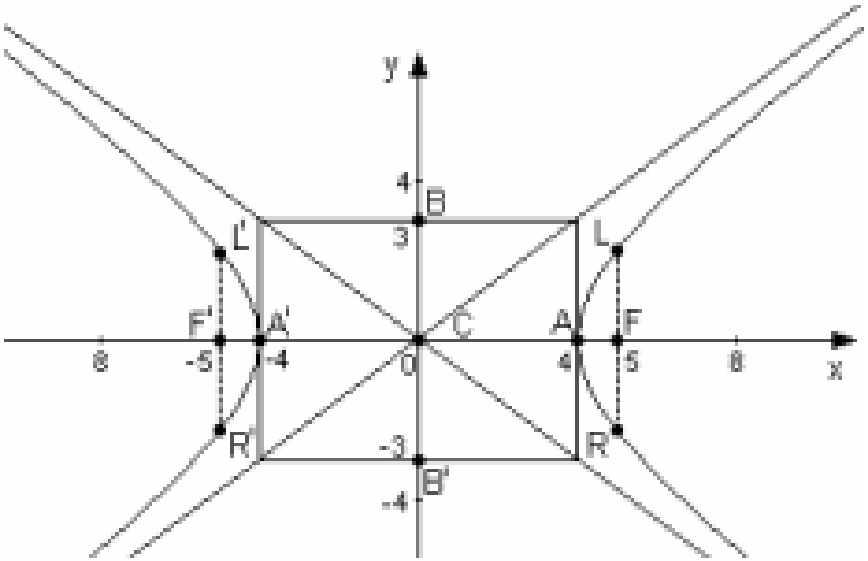
En cada inciso del 1 al 3 se da la ecuación de una hipérbola, se pide obtener sus elementos y bosquejar su gráfica.

1) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

<u>Solución</u>

La ecuación dada es de la forma (I)... $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (hipérbola horizontal). Para que el bosquejo de la hipérbola se haga rápidamente, se recomienda construir primero el rectángulo principal, en seguida, trazar las asíntotas (las diagonales), luego los elementos del primer cuadrante, para después, aprovechando la simetría de la hipérbola completar su bosquejo.

De la ecuación dada: $a^2=16$; $a=4$; $b^2=9$; $b=3$, como $c^2=a^2+b^2$; $c^2=16+9=25$; $c=5$; $\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{9}{4}$, por lo tanto, sus elementos son: $C(0,0)$; $A(4,0)$; $B(0,3)$; $F(5,0)$; $L\left(5,\dfrac{9}{4}\right)$



Por simetría: $A'(-4,0)$; $B'(0,-3)$; $F'(-5,0)$;
$L'\left(-5,\frac{9}{4}\right)$; $R\left(5,-\frac{9}{4}\right)$; $R'\left(-5,-\frac{9}{4}\right)$

Ecuación asíntotas: $y=\frac{3}{4}x$; $y=-\frac{3}{4}x$.

Ecuación del eje focal (transverso): $y=0$ (eje x).

Ecuación del eje conjugado: $x=0$ (eje y).

Excentricidad: $e=\frac{5}{4}$

2) $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$

Solución

La ecuación dada es de la forma (II)... $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ (hipérbola vertical), $a^2=16$; $a=4$; $b^2=9$; $b=3$, como $c^2=a^2+b^2$; $c^2=16+9=25$; $c=5$; $\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{9}{4}$, por lo tanto, sus elementos son: $C(0{,}0)$; $A(0{,}4)$; $B(3{,}0)$; $F(0{,}5)$; $L\left(\dfrac{9}{4},5\right)$

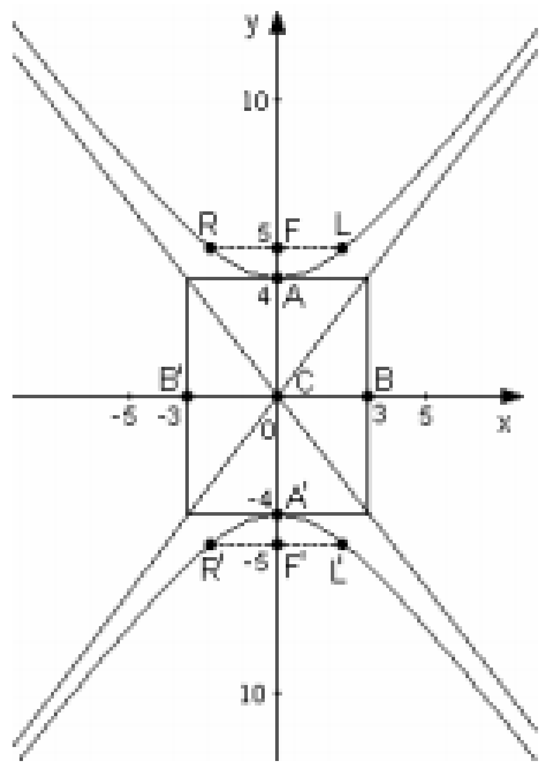
Por simetria: $A'(0,-4)$; $B'(-3{,}0)$; $F'(0,-5)$; $L'\left(\dfrac{9}{4},-5\right)$; $R\left(-\dfrac{9}{4},5\right)$; $R'\left(-\dfrac{9}{4},-5\right)$

Ecuación asintotas: $y=\dfrac{4}{3}x$; $y=-\dfrac{4}{3}x$.

Ecuación del eje focal : $x=0$ (eje y).

Ecuación del eje conjugado: $y=0$ (eje x).

Excentricidad: $e=\dfrac{5}{4}$



3) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{25}=1$

Solución

La ecuación dada es de la forma:

(I)... $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (horizontal) como $a^2=b^2$

$a=b$ o sea $a=b=5$ se trata de una hipérbola equilátera

$c^2=a^2+b^2=25+25=50$; $c=5\sqrt{2}$

$\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{25}{5}=5$ y los elementos son: $C(0,0)$

$A(5,0)$; $B(0,5)$; $F\left(5\sqrt{2},0\right)$; $L\left(5\sqrt{2},5\right)$

Por simetría: $A'(-5,0)$; $B'(0,-5)$; $F'\left(-5\sqrt{2},0\right)$;

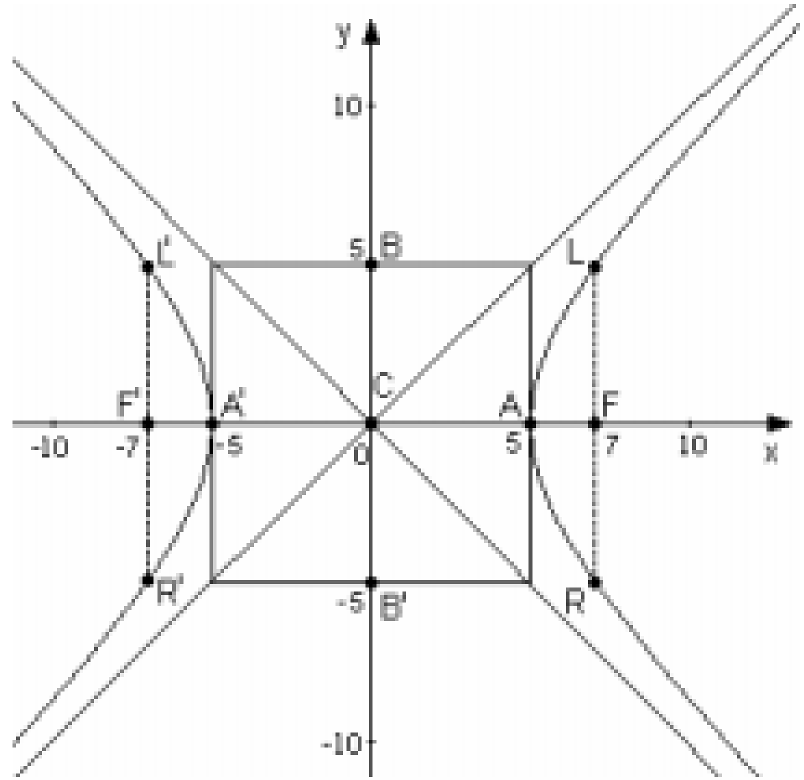
$L'\left(-5\sqrt{2},5\right)$; $R\left(5\sqrt{2},-5\right)$; $R'\left(-5\sqrt{2},-5\right)$

Ecuación asíntotas: $y=x$; $y=-x$.

Ecuación del eje focal (transverso): $y=0$ (eje x).

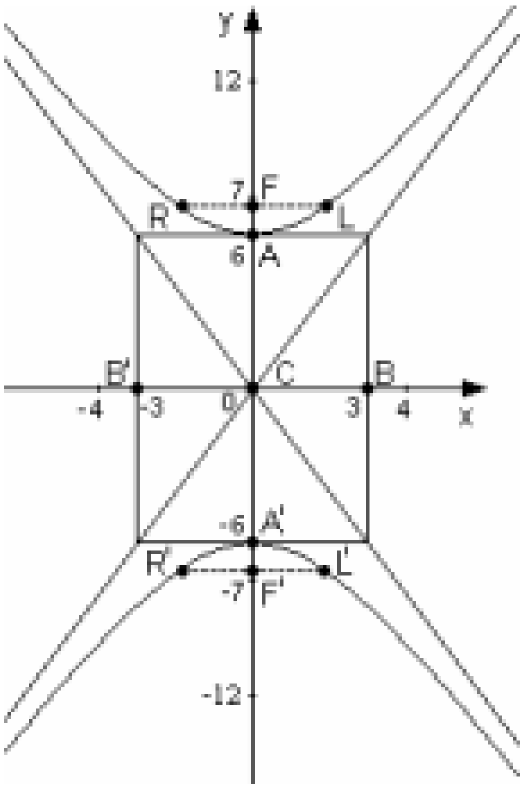
Ecuación del eje conjugado: $x=0$ (eje y).

Excentricidad: $e=\sqrt{2}$



4) Obtener la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, $LR = 3$, semieje transverso $a = 6$ y eje focal sobre el eje y.

Solución



De acuerdo con la información dada, la ecuación de la hipérbola es de la forma:

(II)... $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ (vertical), si $a = 6$ y $LR = \dfrac{2b^2}{a} = 3$; $\dfrac{2b^2}{6} = 3$

$b^2 = 9$; $b = 3$; $c^2 = a^2 + b^2$; $c^2 = 36 + 9 = 45$; $c = 3\sqrt{5}$ ecuación

$\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{9} = 1$, los elementos son: $C(0,0)$; $A(0,6)$; $B(3,0)$

$F\left(0,3\sqrt{5}\right)$; $L\left(\dfrac{3}{2},3\sqrt{5}\right)$. Por simetría: $A'(0,-6)$; $B'(-3,0)$

$F'\left(0,-3\sqrt{5}\right)$; $L'\left(\dfrac{3}{2},-3\sqrt{5}\right)$; $R\left(-\dfrac{3}{2},3\sqrt{5}\right)$; $R'\left(-\dfrac{3}{2},-3\sqrt{5}\right)$

Ecuación asíntotas: $y = 2x$; $y = -2x$.

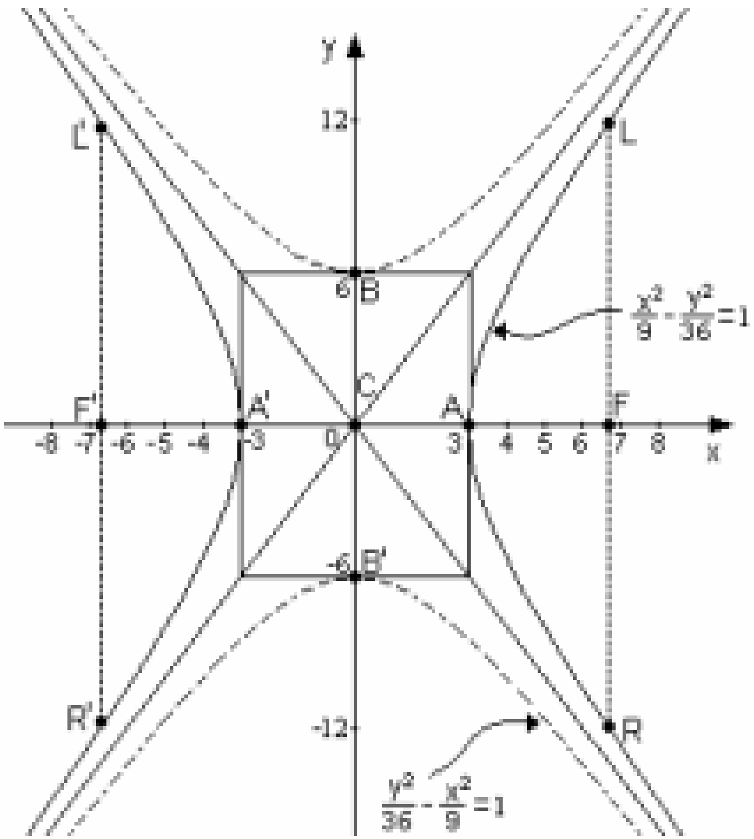
Ecuación del eje focal : $x = 0$ (eje y).

Ecuación del eje conjugado: $y = 0$ (eje x).

Excentricidad: $e = \dfrac{3\sqrt{5}}{6} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

5) Obtener la hipérbola conjugada de $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{9}=1$

<u>Solución</u>



Las hipérbolas conjugadas comparten los mismos ejes, de tal modo que el eje focal de una es el conjugado de la otra y el conjugado de la primera es el focal de la otra. La ecuación de la hipérbola conjugada es: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ (horizontal), donde $a^2=9$; $a=3$; $b^2=36$; $b=6$; $c^2=a^2+b^2$; $c^2=9+36=45$; $c=3\sqrt{5}$; $\frac{b^2}{a}=\frac{36}{3}=12$. Elementos: $C(0{,}0)$; $A(3{,}0)$; $B(0{,}6)$; $F(3\sqrt{5},0)$; $L(3\sqrt{5},12)$

Por simetría: $A'(-3{,}0)$; $B'(0,-6)$; $F'(-3\sqrt{5},0)$; $L'(-3\sqrt{5},12)$; $R(3\sqrt{5},-12)$; $R'(-3\sqrt{5},-12)$

Ecuación asíntotas: $y=2x$; $y=-2x$.

Ecuación del eje focal: $y=0$ (eje x).

Ecuación del eje conjugado: $x=0$ (eje y).

Excentricidad: $e=\frac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$

VIDEOS DE CONSULTA:

https://www.youtube.com/watch?v=ZrdbCg_c
qW4
https://www.youtube.com/watch?v=hrmt8Oje-wY

https://www.youtube.com/watch?v=X0se7kqqz8k

https://www.youtube.com/watch?v=Zg1ASF3C6uc

https://www.youtube.com/watch?v=mBTOp70iWvQ

https://www.youtube.com/watch?v=a6Eq3ZVLQFg

Https://www.youtube.com/watch?v=VRrvA49bu1I

www.dailymotion.com/**video**/xq8oe6_**ecuaciones-de-l**...

1.2 FORMA ORDINARIA DE LA ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO FUERA DEL ORIGEN Y EJE FOCAL PARALELO A ALGUNO DE LOS EJES COORDENADOS

En forma análoga a la elipse, las ecuaciones $(\mathrm{I})\ldots\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y $(\mathrm{II})\ldots\ \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ nos muestran la siguiente PROPIEDAD ESENCIAL de la hipérbola, que sirve para obtener su ecuación en cualquier posición. En esta sección nos limitaremos únicamente a hipérbolas horizontales y verticales con centro fuera del origen.

PROPIEDAD ESENCIAL:

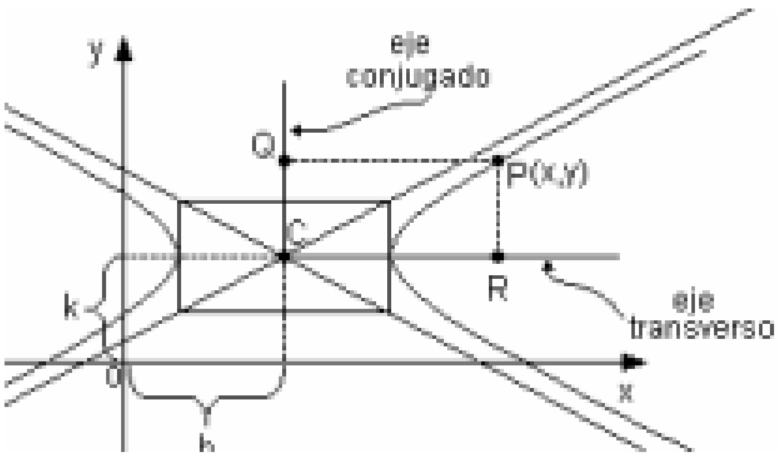
En las ecuaciones (I) y (II), el primero y segundo términos significan:

$$\frac{(\text{La distancia de un punto cualquiera "}P\text{" de la hipérbola al eje conjugado})^2}{(\text{Magnitud del semieje transverso})^2}-$$

$$-\frac{(\text{La distancia de un punto cualquiera "}P\text{" de la hipérbola al eje transverso})^2}{(\text{Magnitud del semieje conjugado})^2}$$

Apliquemos esta propiedad para obtener la ecuación de la hipérbola con centro fuera del origen y ejes paralelos a los ejes coordenados:

a) Si el centro tiene coordenadas $C(h,k)$ y el eje focal es paralelo al eje x como se muestra en la figura, al aplicar la propiedad esencial se tiene:



$$\frac{(PQ)^2}{a^2}-\frac{(PR)^2}{b^2}=1 \quad \ldots(i)$$

donde $PQ = x-h$; $PR = y-k$

sustituyendo en (i):

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \ldots(\text{III})$$

Esta es la ecuación de la hipérbola en forma ordinaria con centro $C(h,k)$ y eje focal paralelo al eje x (hipérbola horizontal).

b) Si el centro tiene coordenadas $C(h,k)$ y el eje focal es paralelo al eje "y" como se muestra en la figura, aplicando la propiedad esencial se tiene:

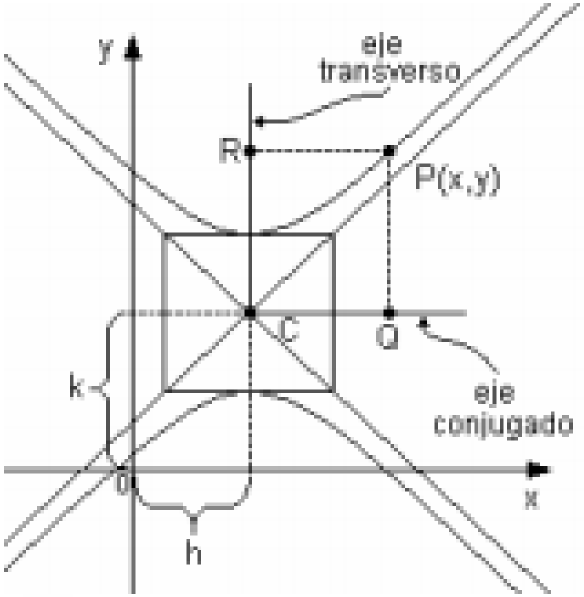
$$\frac{(PQ)^2}{a^2}-\frac{(PR)^2}{b^2}=1 \quad \ldots(ii)$$

donde $PQ=y-k$; $PR=x-h$

sustituyendo en (ii):

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \quad \ldots(\text{IV})$$

(IV) es la ecuación de la hipérbola en forma ordinaria con centro $C(h,k)$ y eje focal (transverso) paralelo al eje y (hipérbola vertical).



Si las coordenadas del centro fueran $C(0,0)$, las ecuaciones (III) y (IV) se reducirán a las ecuaciones (I) y (II):

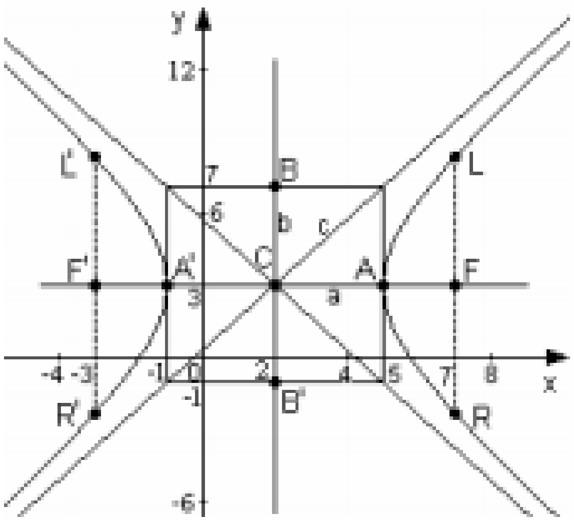
$$\frac{(x-0)^2}{a^2}-\frac{(y-0)^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \ldots(\text{I})$$

$$\frac{(y-0)^2}{a^2}-\frac{(x-0)^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \quad \ldots(\text{II})$$

EJEMPLOS

1) La ecuación de una hipérbola es $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{16}=1$, obtener sus elementos y bosquejar su gráfica.

<u>Solución</u>



La ecuación dada es de la forma:

$(\mathrm{III})\ldots\ \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (hipérbola horizontal), la cual nos proporciona los siguientes datos: las coordenadas del centro $C(h,k)=(2,3)$; $a^2=9$; $a=3$; $b^2=16$; $b=4$; y como $c^2=a^2+b^2$; $c=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}$ $c=5$. Con estos datos ya podemos calcular los elementos de la hipérbola para bosquejar su gráfica en forma análoga a las hipérbolas de la forma (I) y (II).

A partir del centro $C(2,3)$, se construye el rectángulo principal y se trazan sus diagonales (asíntotas) luego se ubican sus elementos a partir del centro y en forma análoga como en las ecuaciones de la forma (I) y (II).

$C(h,k)=(2,3)$; $A(h+a,k)=(5,3)$; $B(h,k+b)=(2,7)$; $F(h+c,k)=(7,3)$; $L\left(h+c,k+\frac{b^2}{a}\right)=\left(7,\frac{25}{3}\right)$.

Por simetría: $A'(h-a,k)=(-1,3)$; $B'(h,k-b)=(2,-1)$; $F'(h-c,k)=(-3,3)$

$L'\left(h-c,k+\frac{b^2}{a}\right)=\left(-3,\frac{25}{3}\right)$; $R\left(h+c,k-\frac{b^2}{a}\right)=\left(7,-\frac{7}{3}\right)$; $R'\left(h-c,k-\frac{b^2}{a}\right)=\left(-3,-\frac{7}{3}\right)$.

Ecuación de las asíntotas: son 2 rectas que pasan por el punto $C(2,3)$ y que tienen pendiente $m=\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{4}{3}$ o sea: $y-3=\pm\frac{4}{3}(x-2)$; $y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$ y $y=-\frac{4}{3}x+\frac{17}{3}$.

Ecuación del eje focal (o transverso): $y=3$ (recta horizontal).

Ecuación del eje conjugado: $x=2$ (recta vertical).

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$

2) Obtener la ecuación y el bosquejo de la gráfica de la hipérbola con centro $C(1,-3)$ y vértices $A(1,-1)$, $B(4,3)$.

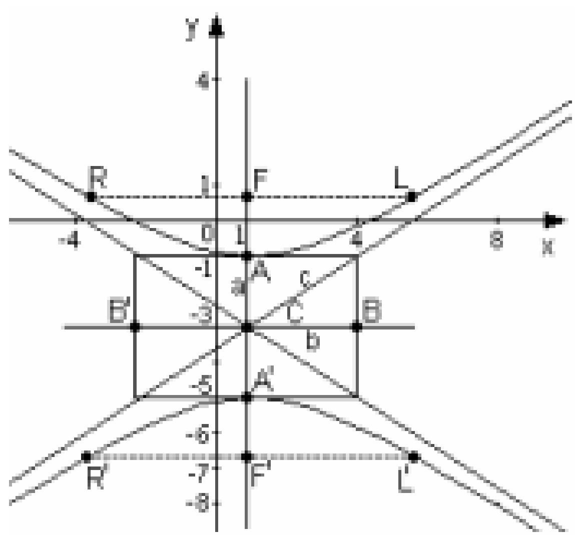
Solución

De acuerdo con la información dada, la ecuación de esta hipérbola es de la forma:

$(IV)\ldots \dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$ (hipérbola vertical), en donde $CA=a$; $a=2$; $CB=b$; $b=3$ y

$c^2=a^2+b^2=4+9$; $c=\sqrt{13}$; $\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{9}{2}$; la ecuación

es: $\dfrac{(y+3)^2}{4}-\dfrac{(x-1)^2}{9}=1$.



Elementos: $C(h,k)=(1,-3)$; $A(h,k+a)=(1,-1)$

$B(h+b,k)=(4,-3)$; $F(h,k+c)=\left(1,-3+\sqrt{13}\right)$

$L\left(h+\dfrac{b^2}{a},k+c\right)=\left(\dfrac{11}{2},-3+\sqrt{13}\right)$.

Por simetría: $A'(h,k-a)=(1,-5)$; $B'(h-b,k)=(-2,-3)$; $F'(h,k-c)=\left(1,-3-\sqrt{13}\right)$;

$L'\left(h+\dfrac{b^2}{a},k-c\right)=\left(\dfrac{11}{2},-3-\sqrt{13}\right)$; $R\left(h-\dfrac{b^2}{a},k+c\right)=\left(-\dfrac{7}{2},-3+\sqrt{13}\right)$;

$R'\left(h-\dfrac{b^2}{a},k-c\right)=\left(-\dfrac{7}{2},-3-\sqrt{13}\right)$

Ecuación asíntotas: $y+3=\pm\dfrac{2}{3}(x-1)$; $y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{11}{3}$ y $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{7}{3}$

Ecuación asíntotas: $y+3=\pm\frac{2}{3}(x-1)$; $y=\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}$ y $y=-\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$

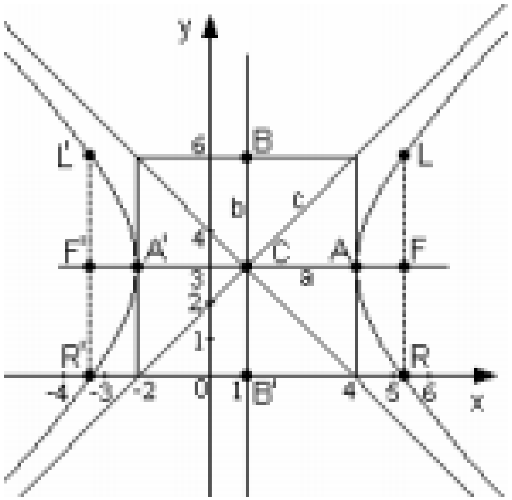
Ecuación eje focal: $x=1$ (recta vertical).

Ecuación eje conjugado: $y=-3$ (recta horizontal).

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

3) Obtener la ecuación de la hipérbola con extremos del eje transverso $A'(-2,3)$, $A(4,3)$, foco $F(1+3\sqrt{2},3)$ y bosquejar su gráfica.

<u>Solución</u>



De acuerdo con la información dada, la ecuación de la hipérbola es de la forma (III)... $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (hipérbola horizontal). El centro de la hipérbola es el punto medio del segmento $A'A$: $C\left(\frac{x_{A'}+x_A}{2},\frac{y_{A'}+y_A}{2}\right)=(1,3)$

$CA=a=4-1=3$; $CF=c=1+3\sqrt{2}-1$; $c=3\sqrt{2}$

si $c^2=a^2+b^2$; $b^2=c^2-a^2=18-9=9$; $b=3$; $\frac{b^2}{a}=\frac{9}{3}=3$

como $a=b$; $3=3$. La hipérbola es equilátera y su ecuación es: $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{9}=1$

Elementos: $C(1,3)$; $A(4,3)$; $B(1,6)$; $F(1+3\sqrt{2},3)$; $L(1+3\sqrt{2},6)$.

Por simetría: $A'(-2,3)$; $B'(1,6)$; $F'(1-3\sqrt{2},3)$; $L'(1-3\sqrt{2},6)$; $R(1+3\sqrt{2},0)$; $R'(1-3\sqrt{2},0)$

Ecuación asíntotas: $y-3=\pm 1(x-1)$; $y=x+2$; $y=-x+4$

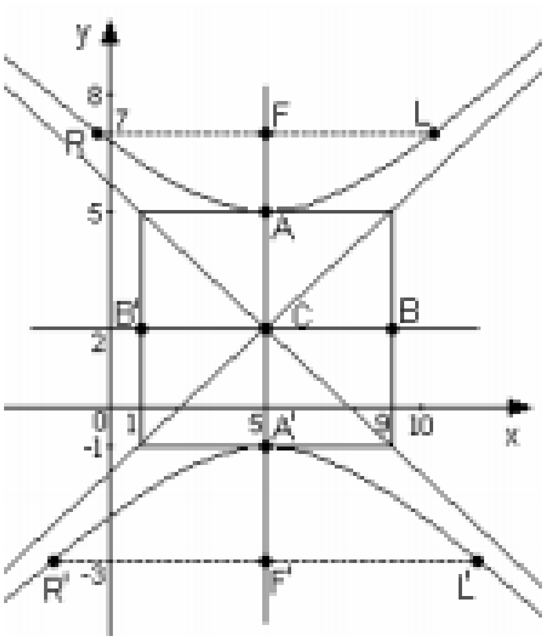
Ecuación eje transverso: $y=3$.

Ecuación eje conjugado: $x=1$.

Excentricidad: $e=\sqrt{2}$

4) Obtener la ecuación de la hipérbola con centro $C(5,2)$, foco $F(5,7)$, excentricidad $e=\frac{5}{3}$ y bosquejar su gráfica.

<u>Solución</u>



De acuerdo con los datos del problema, la ecuación de la hipérbola es de la forma (IV)… $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ (hipérbola vertical). El segmento $CF=c=7-2$; $c=5$

Si $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$; $a=3$; $b^2=c^2-a^2=25-9=16$; $b=4$

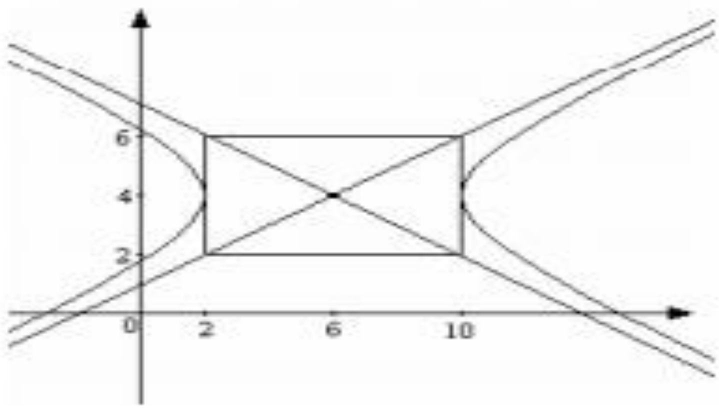
$\frac{b^2}{a}=\frac{16}{3}$. Ecuación: $\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x-5)^2}{16}=1$

Elementos: $C(5,2)$; $A(5,5)$; $B(9,2)$; $F(5,7)$; $L\left(\frac{31}{3},7\right)$.

Por simetría: $A'(5,-1)$; $B'(1,2)$; $F'(5,-3)$

$L'\left(\frac{31}{3},-\frac{10}{3}\right)$; $R\left(-\frac{1}{3},7\right)$; $R'\left(-\frac{1}{3},-\frac{10}{3}\right)$

5) Obtener la ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones indicadas en la siguiente gráfica, y sus elementos.



Solución

La ecuación de la hipérbola es de la forma (III)... $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (hipérbola horizontal).
A simple vista podemos decir que $C(6,4)$; $A(10,4)$; $B(6,6)$; $A'(2,4)$; $B'(6,2)$, por lo tanto $a=4$;
$b=2$ y como $c^2=a^2+b^2=16+4=20$; $c=2\sqrt{5}$; $\frac{b^2}{a}=1$; ecuación: $\frac{(x-6)^2}{16}-\frac{(y-4)^2}{4}=1$
Los elementos restantes son: $F\left(6+2\sqrt{5},4\right)$; $L\left(6+2\sqrt{5},5\right)$; $F'\left(6-2\sqrt{5},4\right)$; $L'\left(6-2\sqrt{5},5\right)$;
$R\left(6+2\sqrt{5},3\right)$; $R'\left(6-2\sqrt{5},3\right)$.
Ecuación asíntotas: $y-4=\pm\frac{1}{2}(x-6)$; $y=\frac{1}{2}x+1$; $y=-\frac{1}{2}x+7$
Ecuación eje transverso: $y=4$.
Ecuación eje conjugado: $x=6$.
Excentricidad: $e=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

1.3 FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON EJES PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS

En forma análoga a la elipse, si en las ecuaciones (III)... $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ y (IV)... $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ multiplicamos por a^2b^2, desarrollamos los cuadrados, trasponemos y ordenamos términos, obtenemos la ecuación en FORMA GENERAL de la hipérbola $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados, donde los coeficientes A y C son de signo contrario, los coeficientes de primer grado D y E indican que el centro de la hipérbola está fuera del origen, si $D=0$ el centro está sobre el eje "y", si $E=0$ estará sobre el eje "x", el término independiente F indica que la hipérbola no pasa por el origen y si $F=0$ entonces si pasa por el origen.

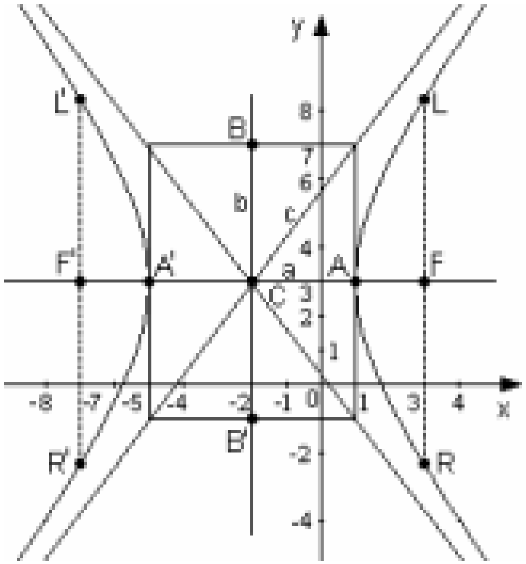
Recíprocamente, cuando la ecuación de una hipérbola es dada en forma general, puede obtenerse su forma ordinaria mediante el método de completar cuadrados y así conocer sus elementos para bosquejar su gráfica.

EJEMPLOS

En cada inciso se da la ecuación de una hipérbola en forma general, obtener su forma ordinaria, sus elementos y bosquejar su gráfica.

1) $16x^2 - 9y^2 + 64x + 54y - 161 = 0$

<u>Solución</u>



Se ordena la ecuación dada como sigue:

$16x^2 + 64x - 9y^2 + 54y = 161$

factorizando y completando cuadrados:

$16(x^2 + 4x) - 9(y^2 - 6y) = 161$

$16[x^2 + 4x + (2)^2] - 9[y^2 - 6y + (3)^2] = 161 + 64 - 81$

$16(x+2)^2 - 9(y-3)^2 = 144$

dividiendo entre 144:

$$\frac{16(x+2)^2}{144} - \frac{9(y-3)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x+2)^2}{\frac{144}{16}} - \frac{(y-3)^2}{\frac{144}{9}} = 1; \quad \boxed{\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1} \text{ Forma ordinaria}$$

$a^2 = 9$; $a = 3$; $b^2 = 16$; $b = 4$; $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$; $c = 5$; $\frac{b^2}{a} = \frac{16}{3}$

Elementos: $C(-2,3)$; $A(1,3)$; $B(-2,7)$; $F(3,3)$; $L\left(3,\frac{25}{3}\right)$

Por simetría: $A'(-5,3)$; $B'(-2,-1)$; $F'(-7,3)$; $L'\left(-7,\frac{25}{3}\right)$; $R\left(3,-\frac{7}{3}\right)$; $R'\left(-7,-\frac{7}{3}\right)$

Ecuación asíntotas: $y - 3 = \pm\frac{4}{3}(x+2)$; $y = \frac{4}{3}x + \frac{17}{3}$; $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

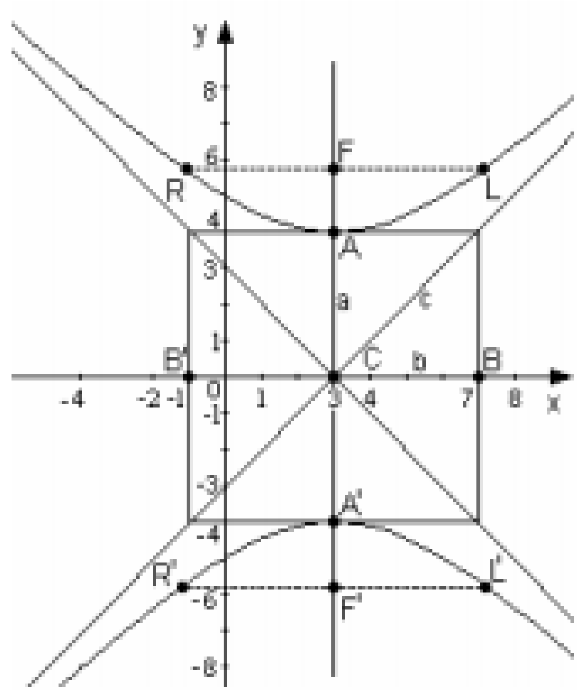
Ecuación eje transverso: $y = 3$.

Ecuación eje conjugado: $x = -2$.

Excentricidad: $e = \frac{5}{3}$

2) $2y^2 - 2x^2 + 12x - 50 = 0$

<u>Solución</u>



Observar que en la ecuación dada no aparece el término de primer grado en "y", o sea que el coeficiente $E = 0$, por lo tanto el centro de la hipérbola estará sobre el eje x.

Dividiendo la ecuación dada entre 2 se tiene:

$y^2 - x^2 + 6x - 25 = 0$

factorizando y completando cuadrados:

$y^2 - \left(x^2 - 6x + (3)^2\right) = 25 - 9$

$y^2 - (x-3)^2 = 16$

dividiendo entre 16: $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{(x-3)^2}{16} = 1$ forma ordinaria,

se trata de una hipérbola equilátera vertical, en donde

$a^2 = b^2 = 16$; $a = b = 4$; $c^2 = a^2 + b^2 = 32$; $c = 4\sqrt{2}$; $\dfrac{b^2}{a} = 4$

Elementos: $C(3,0)$; $A(3,4)$; $B(7,0)$; $F\left(3,4\sqrt{2}\right)$; $L\left(7,4\sqrt{2}\right)$

Por simetría: $A'(3,-4)$; $B'(-1,0)$; $F'\left(3,-4\sqrt{2}\right)$; $L'\left(7,-4\sqrt{2}\right)$; $R\left(-1,4\sqrt{2}\right)$; $R'\left(-1,-4\sqrt{2}\right)$

Ecuación asíntotas: $y = \pm 1(x-3)$; $y = x - 3$; $y = -x + 3$

Ecuación eje transverso: $x = 3$.

Ecuación eje conjugado: $y = 0$ (eje x).

Excentricidad: $e = \sqrt{2}$

3) $3x^2 - 12y^2 - 48y - 60 = 0$

Solución

Como no hay término en "x", el coeficiente $D = 0$, la hipérbola tendrá su centro sobre el eje "y".

Dividiendo la ecuación dada entre 3 se obtiene: $x^2 - 4y^2 - 16y - 20 = 0$

factorizando y completando cuadrados:

$$x^2 - 4\left(y^2 + 4y\right) = 20$$

$$x^2 - 4\left(y^2 + 4y + (2)^2\right) = 20 - 16$$

$$x^2 - 4(y+2)^2 = 4$$

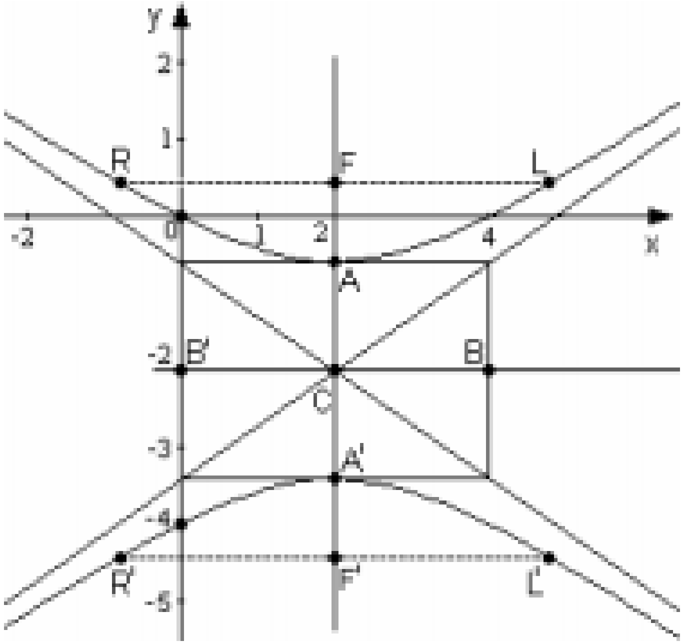
Dividiendo entre 4: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{\frac{4}{4}} = \dfrac{4}{4}$

$\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{1} = 1$ Forma ordinaria, es la ecuación de una hipérbola horizontal, donde:

4) $4y^2 - 2x^2 + 8x + 16y = 0$

Solución

La ecuación dada carece de término independiente ($F = 0$), por lo tanto se trata de una hipérbola que pasa por el origen.



Dividiendo la ecuación dada entre 2 se obtiene: $2y^2 - x^2 + 4x + 8y = 0$, ordenando, factorizando y completando cuadrados:

$$2y^2 + 8y - x^2 + 4x = 0$$

$$2\left(y^2 + 4y + (2)^2\right) - \left(x^2 - 4x + (2)^2\right) = 8 - 4$$

$$2(y+2)^2 - (x-2)^2 = 4$$

Dividiendo entre 4: $\dfrac{(y+2)^2}{\frac{4}{2}} - \dfrac{(x-2)^2}{4} = \dfrac{4}{4}$

$\dfrac{(y+2)^2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{4} = 1$ Forma ordinaria, es la ecuación de una hipérbola vertical, donde:

$a^2 = 2$; $a = \sqrt{2}$; $b^2 = 4$; $b = 2$; $c^2 = a^2 + b^2 = 2 + 4 = 6$; $c = \sqrt{6}$; $\dfrac{b^2}{a} = 2\sqrt{2}$

Elementos: $C(2,-2)$; $A\left(2,-2+\sqrt{2}\right)$; $B(4,-2)$; $F\left(2,-2+\sqrt{6}\right)$; $L\left(2+2\sqrt{2},-2+\sqrt{6}\right)$

Por simetría: $A'\left(2,-2-\sqrt{2}\right)$; $B'(0,-2)$; $F'\left(2,-2-\sqrt{6}\right)$; $L'\left(2+2\sqrt{2},-2-\sqrt{6}\right)$; $R\left(2-2\sqrt{2},-2+\sqrt{6}\right)$;
$R'\left(2-2\sqrt{2},-2-\sqrt{6}\right)$

Ecuación asíntotas: $y+2=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$; $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}-2$; $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}-2$

Ecuación eje transverso: $x=2$

Ecuación eje conjugado: $y=-2$

Excentricidad: $e=\sqrt{3}$

ACTIVIDAD 1

1 Representa gráficamente y determina las coordenadas de los focos, de los vértices y la excentricidad de las siguientes hipérbolas.

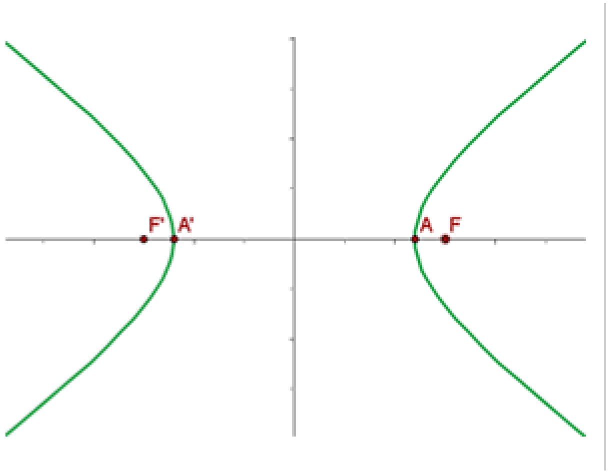
1. $$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1$$

2. $$\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$$

3. $$2x^2 - 3y^2 = 30$$

4. $$9y^2 - 16x^2 = 1296$$

$\boxed{1}$ $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1$



$a^2 = 144$ $a = 12$

$b^2 = 81$ $b = 9$

$c = \sqrt{144 + 81}$ $c = 15$

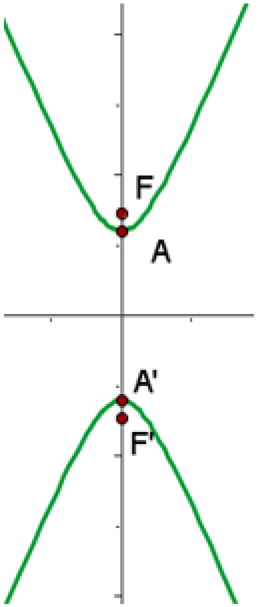
$A(12, 0)$ $A'(-12, 0)$

$F(15, 0)$ $F'(-15, 0)$

$$e = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

2

$$\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$$



$a^2 = 144$ $\quad a = 12$

$b^2 = 25$ $\quad b = 5$

$c = \sqrt{144 + 25}$ $\quad c = 13$

$A(0, 12)$ $\quad A'(0, -12)$

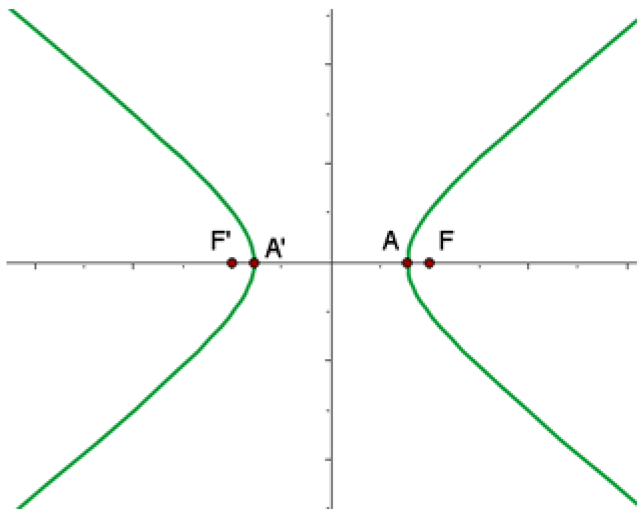
$F(0, 13)$ $\quad F'(0, -13)$

$$e = \frac{13}{12}$$

3

$$2x^2 - 3y^2 = 30$$

Dividiendo por 30:



$$\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{10} = 1$$

$a^2 = 15$ $\quad a = \sqrt{15}$

$b^2 = 10$ $\quad b = \sqrt{10}$

$c = \sqrt{15 + 10}$ $\quad c = 5$

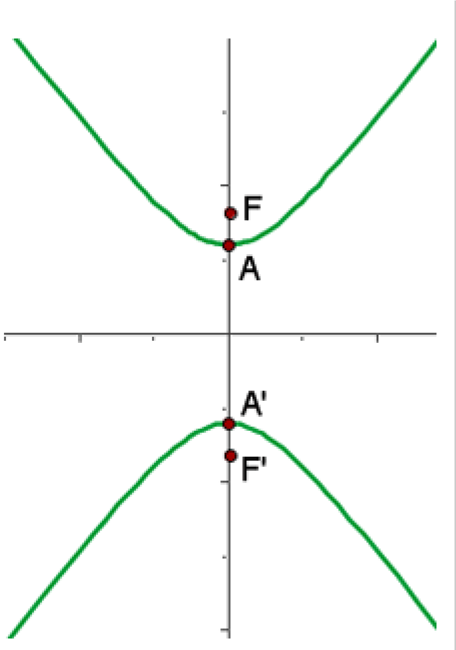
$A(\sqrt{15}, 0)$ $\quad A'(-\sqrt{15}, 0)$

$F(5, 0)$ $\quad F'(-5, 0)$

$$e = \frac{5}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

4

$9y^2 - 16x^2 = 1296$



Dividiendo por 1296:

$$\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{81} = 1$$

$a^2 = 144$ $\quad$ $a = 12$

$b^2 = 81$ $\quad$ $b = 9$

$c = \sqrt{144 + 81}$ $\quad$ $c = 15$

$A(0, 12)$ $\quad$ $A'(0, -12)$

$F(0, 15)$ $\quad$ $F'(0, -15)$

$$e = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

2 Representa gráficamente y determina las coordenadas del centro, de los focos, de los vértices y la excentricidad de las siguientes hipérbolas:

1 $$4x^2 - 3y^2 - 8x - 8 = 0$$

2 $$y^2 - 2x^2 - 4x - 4y = 0$$

3 Hallar la ecuación de una hipérbola de eje focal 8 y distancia focal 10.

4 El eje principal de una hipérbola mide 12, y la curva pasa por el punto P(8, 14). Hallar su ecuación.

5 Calcular la ecuación reducida de la hipérbola cuya distancia focal es 34 y la distancia de un foco al vértice más próximo es 2.

6 Determina la ecuación reducida de una hipérbola que pasa por los puntos $(4,\sqrt{8})$ y $(2\sqrt{3},2)$.

7 Determina la ecuación reducida de una hipérbola que pasa por el punto $(2,\sqrt{3})$ y su excentricidad es $\sqrt{3}$.

8 Determina la ecuación reducida de una hipérbola sabiendo que un foco dista de los vértices de la hipérbola 50 y 2.

9 Determina la posición relativa de la recta $x + y - 1 = 0$ con respecto a la hipérbola $x^2 - 2y^2 = 1$.

10 Una hipérbola equilátera pasa por el punto $(4, 1/2)$. Haya su ecuación referida a sus asíntotas como ejes, y las coordenadas de los vértices y los focos.

VIDEOS DE CONSULTA:

https://www.youtube.com/watch?v=L4cBe6AQ1wY

https://www.youtube.com/watch?v=_rlP1dMcVws

https://www.youtube.com/watch?v=5lXoWvHyDWE

https://www.youtube.com/watch?v=AT3mKKG9nQM

https://www.youtube.com/watch?v=ZrdbCg_cqW4

https://www.youtube.com/watch?v=7ve-Rg7mF2I

https://www.youtube.com/watch?v=2aDP-l07gh4

ACTIVIDAD 2

Realice un video donde explique como se obtiene la ecuación general a partir de la ecuación ordinaria.

1. El video tendrá una duración de 6 minutos.

2. Utilice una pizarra si no cuenta con una utilice hojas de papel plumones o lápiz.

3. En el video solo debe aparecer las hojas la pizarra y el proceso de como lo va realizando y su narración.

Evaluación:

Examen (conocimiento) 40%

Procesos y productos 30%

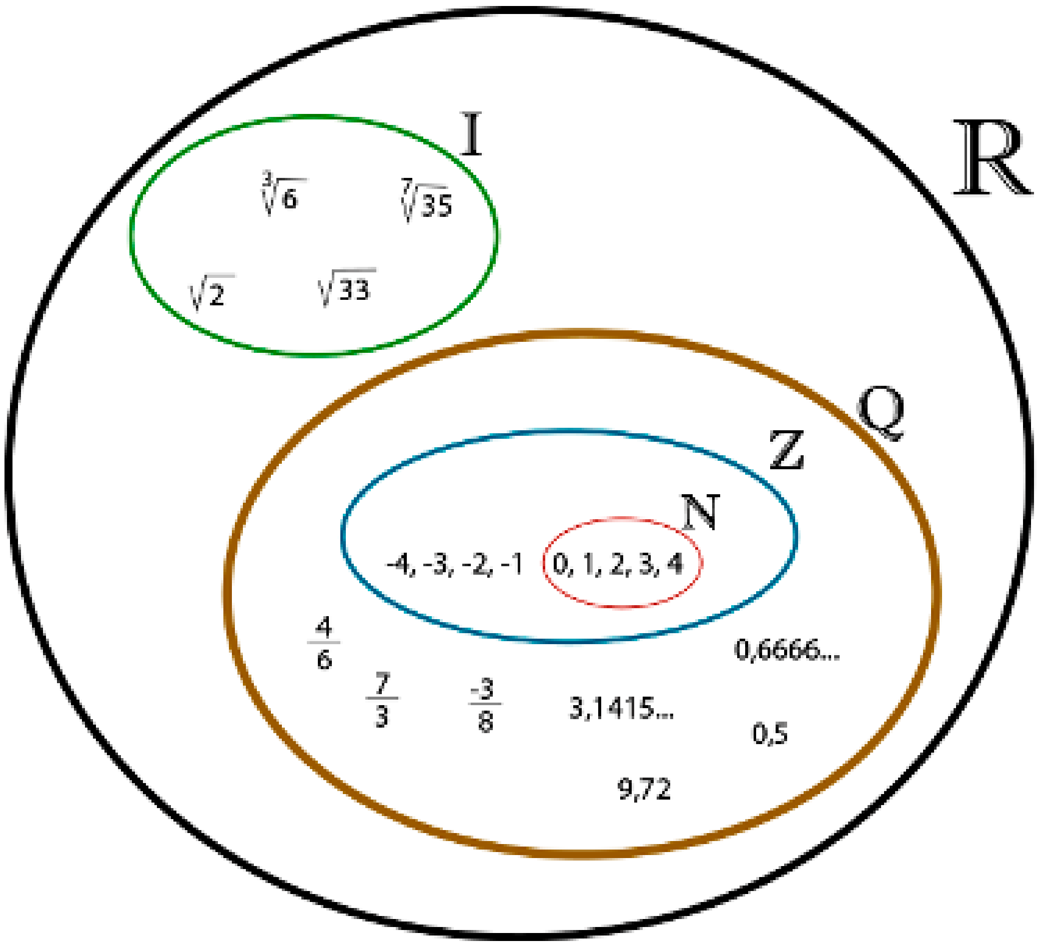
Desarrollo y Actividades 30%

Para hacer un total del 100%

2. NÚMEROS REALES

El conjunto de los números reales pertenece en matemáticas a la recta numérica que comprende a los números racionales y a los números irracionales. Esto quiere decir que incluyen a todos los números positivos y negativos, el símbolo cero, y a los números que no pueden ser expresados mediante fracciones de dos enteros que tengan como denominador a números no nulos (excluye al denominador cero).

Un número real puede ser expresado de diferentes maneras, por un lado están los números reales que pueden ser expresados con mucha facilidad, ya que no poseen reglas complejas para hacerlo. Estos son los números enteros y los fraccionarios, como por ejemplo el número 6767 que viene a ser un entero, o también el 3434, que es un número fraccionario compuesto de dos enteros, cuyo numerador es 33 y su denominador es 44. Sin embargo, también existen otros números que pueden ser expresados bajo diferentes reglas matemáticas más complejas como números cuyos decimales son infinitos como el número ππ o $2\sqrt{2}$ y que sirven para realizar cálculos matemáticos pero no pueden ser representados como un símbolo numérico único.



N= números naturales (enteros positivos)
Z= números enteros (positivos y negativos)
Q= números racionales (fracciones y decimales)
I= Irracionales

Los números reales se representa con la letra RR, y aparecen por la necesidad de realizar cálculos más complejos ya que en épocas como entre el siglo XVI y el XVII, se hacían necesarias nuevas cifras para los avances tecnológicos que ya no podían ser representados por cifras aproximadas ni por expresiones coloquiales por su inexactitud. El rigor del avance de la humanidad a partir de sus herramientas, hizo necesaria la creación de nuevas expresiones matemáticas que den mayor exactitud a los cálculos.

VIDEOS DE CONSULTA:

https://www.youtube.com/watch?v=lsoFP2YApvs

https://www.youtube.com/watch?v=tMHJbmUGcQk

https://www.youtube.com/watch?v=EKNI09evFBs

https://www.youtube.com/watch?v=x2EEmTWVhq8

3. INTERVALOS

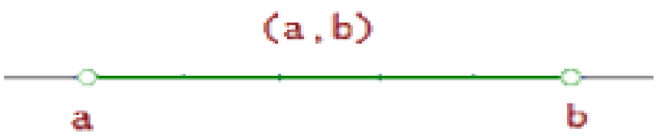
Definición de intervalo

Se llama **intervalo** al **conjunto de números reales** comprendidos entre otros dos dados: **a y b** que se llaman **extremos del intervalo**.

Intervalo abierto

Intervalo abierto, (a, b), es el **conjunto de todos los números reales mayores que a y menores que b**.

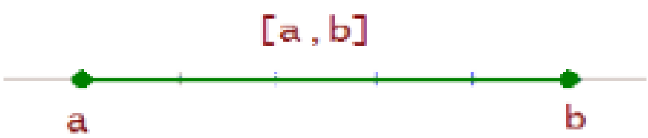
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$$



Intervalo cerrado

Intervalo cerrado, [a, b], es el **conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b**.

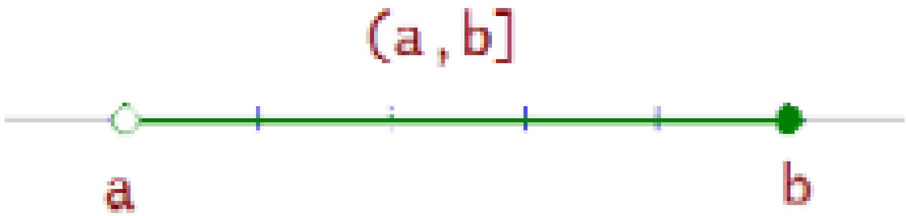
$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$$



Intervalo semiabierto por la izquierda

Intervalo semiabierto por la izquierda, (a, b], es el **conjunto de todos los números reales mayores que a y menores o iguales que b**.

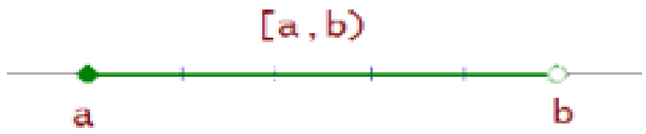
$$(a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$$


(a , b]
a
b

Intervalo semiabierto por la derecha

Intervalo semiabierto por la derecha, **[a, b)**, es el **conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores que b**.

$$[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b \}$$



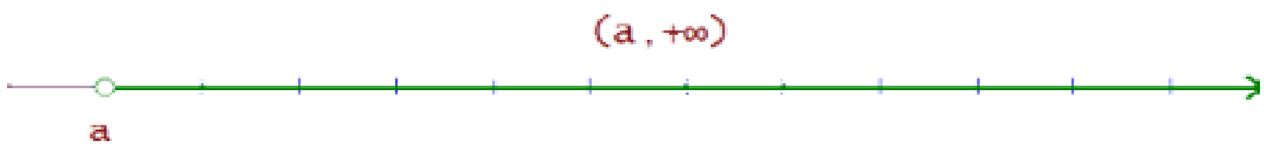
Cuando queremos nombrar un conjunto de puntos formado por dos o más de estos intervalos, se utiliza el signo U (**unión**) entre ellos.

Semirrectas

Las **semirrectas** están determinadas por un número. En una **semirrecta** se encuentran todos los números mayores (o menores) que él.

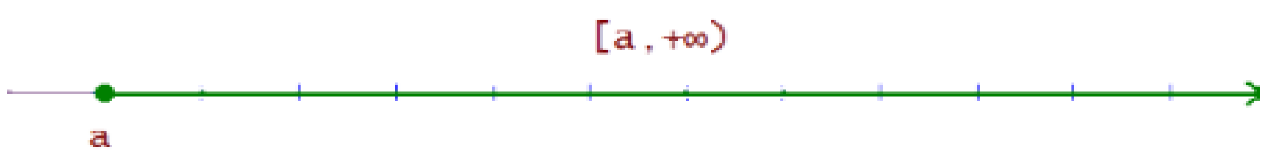
$x > a$

$$(a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < +\infty \}$$



$x \geq a$

$$[a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < +\infty \}$$

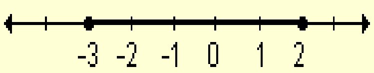


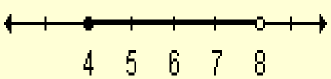
$x < a$

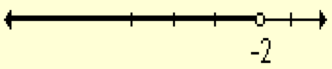
$$(-\infty, a) = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ -\infty < x < a \}$$

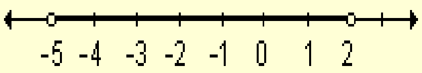
ACTIVIDAD 3

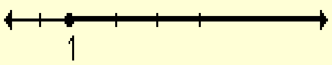
1) Escriba como intervalo el conjunto definido sobre la recta real.

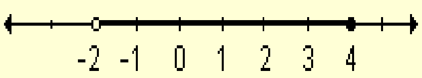
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

2) Escriba, si es posible, como intervalo o unión de intervalos los siguientes conjuntos de números reales:

a) $A = \{ x / 5 < x < 9 \}$

b) $B = \{ x / -1 \leq x \leq 3 \}$

c) $C = \{ x / x < -2 \vee x > 2 \}$

d) $D = \{ x / -4 < x < 2 \wedge x \neq -1 \}$

3) Escriba en notación conjuntista los siguientes intervalos de números reales:

a) $\left(\frac{5}{4}, 3\right)$

b) $(-\infty, -1]$

c) $(-7, -2]$

d) $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$

e) $\left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

f) $[4, 9]$

4. Representar el intervalo [-2,0]

5. Representar el intervalo (-2,0]

VIDEOS DE CONSULTA:

https://www.youtube.com/watch?v=MDiG-QLGmrA

https://www.youtube.com/watch?v=-0CcGpUm3Tc

https://www.youtube.com/watch?v=ptpRMWcHnL0

https://www.youtube.com/watch?v=DsnsHH_XgFs

https://www.youtube.com/watch?v=41EBV497OI0

3. LIMITES DE UNA FUNCION

El concepto de limite es fundamental dentro de las áreas del calculo diferencial e Integral. Por lo que iniciaremos por describir los conceptos y definiciones de este tema en esta sección.

El concepto de límite lo iniciaremos con un ejemplo de manera numérica para su mejor comprensión, antes de su definición formal:

Sea "f(x)" una función dada por:

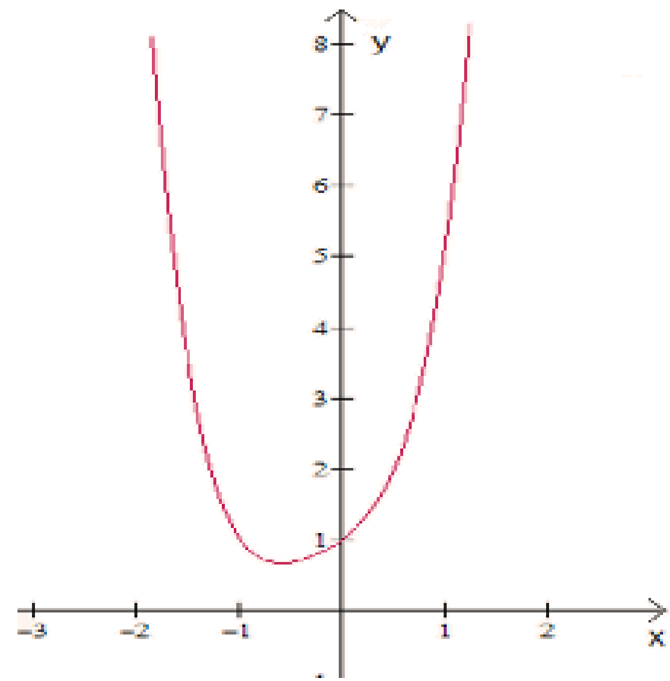
$$f(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$$

Ahora recordemos que la división entre cero no esta permitida, independientemente de la condición: "0/0". Por lo que la función no estará definida para x = 1.

Ahora bien, sustituyendo el valor de x=1 en la ecuacion f(x) resultará

$$f(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} = Indeterminada$$

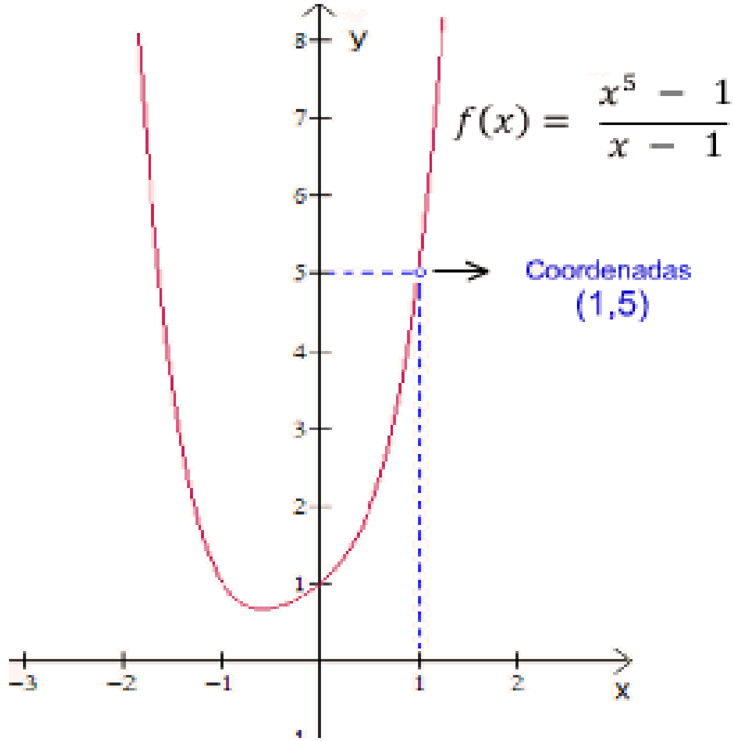
Gráficando la función



En el punto marcado como " ° " existe un hueco de valor indeterminado para x= 1.

Tal pareciera que el hoyo tiene coordenadas (1,5)

En el punto marcado como " ° " existe un hueco de valor indeterminado para x= 1.
Tal pareciera que el hoyo tiene coordenadas (1,5)



Por lo que, para determinar el valor al que tiende "f(x)" cuando "x" tiende a "1"
le daremos valores próximos a " 1 " por la izquierda y la derecha.
Tal como se muestraran en las tablas siguientes

VALORES DE f(x).

PARA LA FUNCIÓN :

$$f(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$$

" x " TIENDE A 1 POR LA IZQUIERDA

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.92	0.94	0.96	0.98	0.99	0.999	0.9999	0.99999	0.999999
f(x)	1.6496	1.9375	2.3056	2.7731	3.3616	4.0951	4.2615	4.4349	4.6157	4.8040	4.9010	4.9900	4.9990	4.9999	4.99999

" f(x) " TIENDE A 5 POR LA IZQUIERDA

" x " TIENDE A 1 POR LA DERECHA

x	1.000001	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.10	1.11	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19
f(x)	5.0000	5.0001	5.0010	5.0100	5.1010	6.1051	6.2278	6.3528	6.4803	6.6101	6.7424	6.8771	7.0144	7.1542	7.2966

" f(x) " TIENDE A 5 POR LA DERECHA

Aunque "x" no puede llegar a ser "1" podemos ir tan cerca como queramos a este ("1") .

Dando como consecuencia que "f(x)" se haga tan próximo como queramos a "5" .

DEFINICIÓN:

Si "f(x)" se hace arbitrariamente próximo a un único número "K" cuando "x" se aproxima hacía "c" por ambos lados, decimos que el limite de "f(x)" cuando "x" tiende a "c" es "K". Entonces lo podremos expresar como:

$$\lim_{x \to c} f(x) = K$$

POR CONSIGUIENTE EL COMPORTAMIENTO DE LA FUNCION " f(x)" MOSTRADAS EN LAS TABLAS ANTERIORES. PODRÍA EXPRESARSE DE LA SIGUIENTE MANERA:

El límite de la funcion $f(x) = \dfrac{x^5 - 1}{x - 1}$ cuando " x " tiende a " 1 " es " 5 ".

ENTONCES

Podriamos representaralas de la siguiente forma

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} = 5$$

Entonces ahora si podemos expresar la definicion de limites por ambos lados:

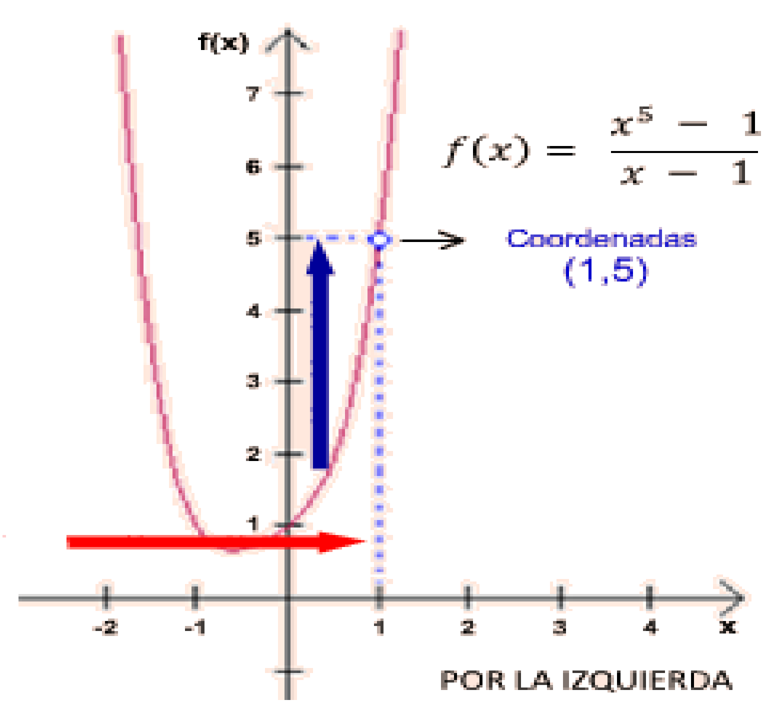
DEFINICIÓN:

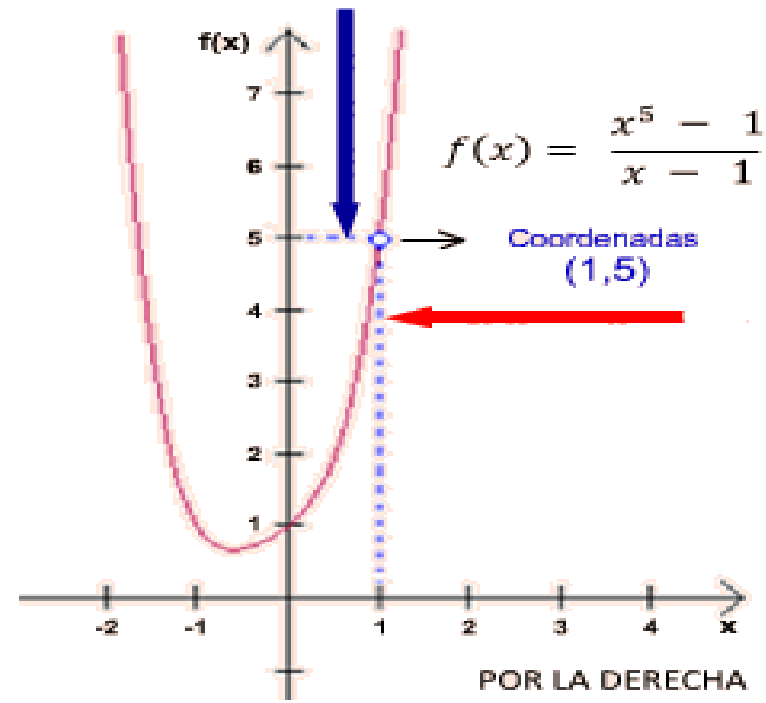
Si "f(x)" se hace arbitrariamente próximo a un único número "K" , cuando "x" se aproxima hacía "c" por ambos lados.
Entonces decimos que el limite de "f(x)" cuando "x" tiende a "c" es "K".
Expresandose como:

$$\lim_{x \to c} f(x) = K$$

NOTA: Si el límite de una funcion existe, es unico (es decir solo existe un solo valor de f(x)).

EL LÍMITE EXPLICADO CON ANTERIORIDAD SE CONSIDERA COMO "LIMITE BILATERAL" PORQUE LLEGA AL MISMO VALOR DEL LÍMITE POR AMBOS LADOS (IZQIUIERDA Y DERECHA)





De $-\infty$ a "1"

De ∞ a "1"

TIENDE A "5" CUANDO "x" SE APROXIMA A "1 " POR AMBOS LADOS(IZQUIERDA Y DERECHA).
PARA LA FUNCIÓN DADA

AHORA BIEN.

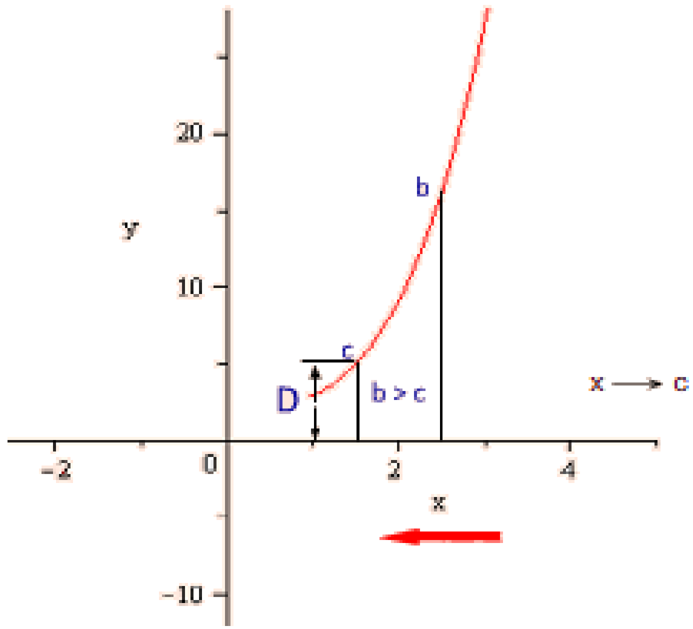
QUE PASA CUANDO EL LÍMITE NO ES IGUAL AL DE AMBOS LADOS(IZQUIERDA Y DERECHA)
ENTONCES DECIMOS QUE SE TIENE UN "LÍMITE LATERAL"

*.- POR LA DERECHA

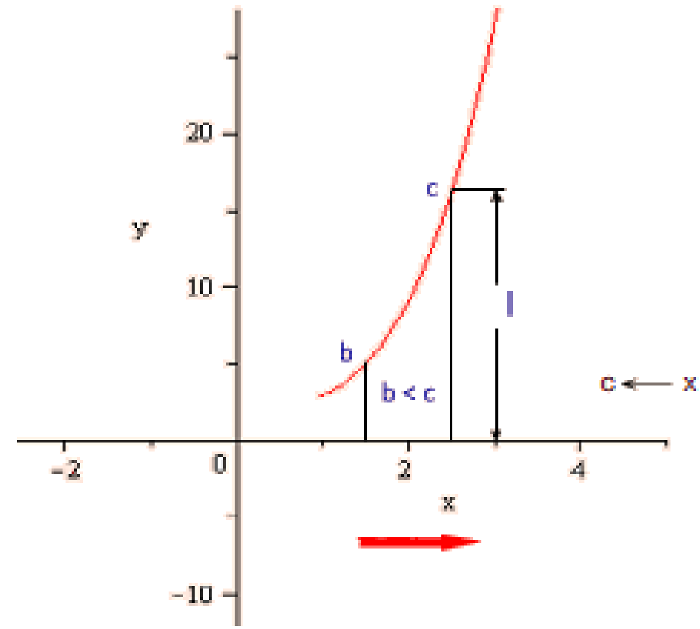
*.- POR LA IZQUIERDA

POR LO TANTO SU DEFINICIÓN SERÍA:

Es el límite que se da a medida que "x" se aproxima a un número "c" por:



POR LA DERECHA



POR LA IZQUIERDA

$$\lim_{x \to c} f(x) = D$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = I$$

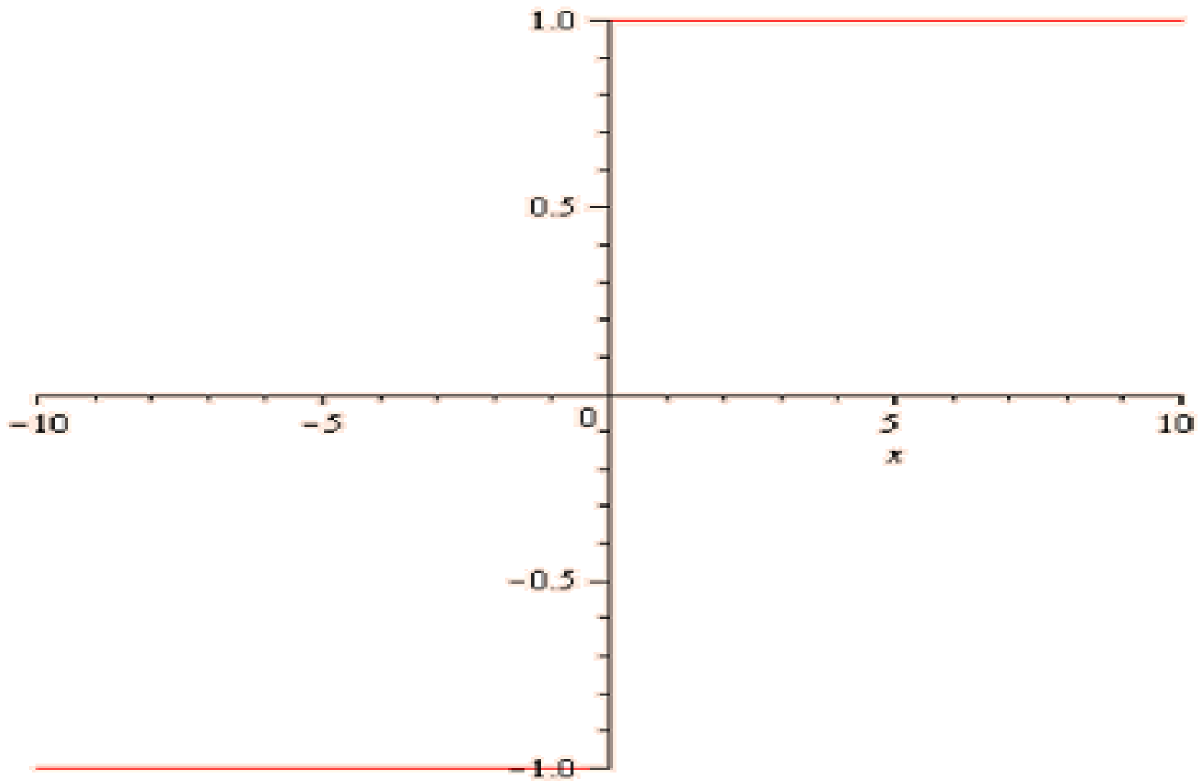
$$D \neq I$$

1.- Encontrar el(los) limite(s) lateral(es) si existen para la siguiente función escalon, dada por.

$$y = \frac{-x}{|x|}$$

SOLUCIÓN:

Graficando tenemos.



alizando al primer intervalo (x > 0) el límite por la derecha viniendo de ∞ a " 0 " su limite es " 1 ".

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-x}{|x|} = 1$$

ando al segundo intervalo (x < 0) el límite por la derecha viniendo de - ∞ a " 0 " su limite es " - 1

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-x}{|x|} = -1$$

Observese que el limite por la derecha no es igual al limite por la izquierda.
para "x =0" no esta definida

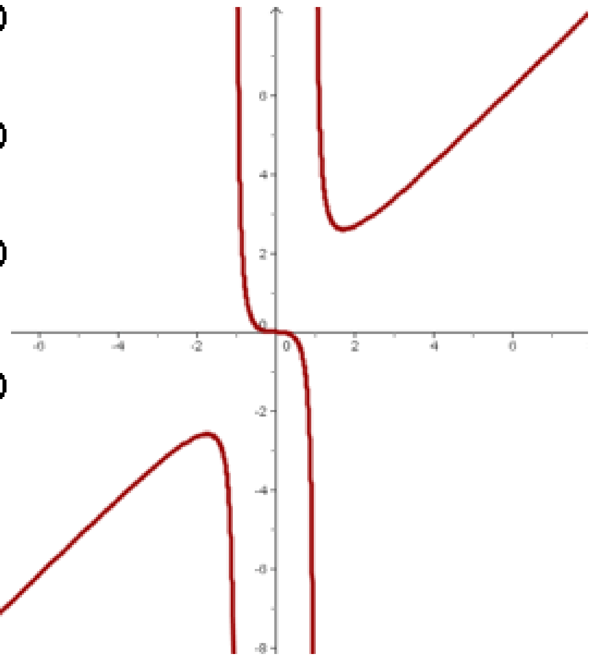
ACTIVIDAD 4

1 Aplicando la definición de límite, probar que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+3}{2} = 2$$

2 Observa la gráfica de esta función f(x) y calcular estos límites.

1. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
2. $\lim_{x \to -1} f(x)$
3. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$
4. $\lim_{x \to 1^+} f(x)$
5. $\lim_{x \to \infty} f(x)$



Calcular los siguientes límites

3 $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x} \right)$

4 $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x^2+1}{x-2} \right)$

4 $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x^2+1}{x-2} \right)$

5 $\lim_{x \to \infty} \dfrac{7x-1}{\sqrt[3]{5x^3 + 4x - 2}}$

5 $\lim_{x \to \infty} \dfrac{7x-1}{\sqrt[3]{5x^3 + 4x - 2}}$

6 $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{4x^4 + x^2 + 1}}{x^2 + 1}$

7 $\lim_{x \to \infty} \dfrac{(x^2+1)^2 - 3x^2 + 3}{x^3 - 5}$

8 $\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^8-5)}{x^2}$

9 $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-1}{\sqrt{x^7+x^5}}$

10 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^7+x^5+x^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^x}$

11 $\lim_{x\to 0}\frac{2}{3+4^{\frac{1}{x}}}$

12 $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{18x^2+1}\,\frac{1}{\sqrt{32x^2-3}}\right)$

13 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1}{x}$

14 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

15 $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

ACTIVIDAD 5

Formule tres funciones que resuelvan problemas de su vida diaria, resuélvalas y explique como las formulo.

VIDEOS DE CONSULTA:

https://www.youtube.com/watch?v=rrbS5l--1Ss

https://www.youtube.com/watch?v=Uf9QXgiqfdo

https://www.youtube.com/watch?v=Xxjf1_lBDFk

https://www.youtube.com/watch?v=8V63b4WxAKY

https://www.youtube.com/watch?v=PwBdwnc621g

https://www.youtube.com/watch?v=AcSwtKOwtLU

Evaluación:

Examen (conocimiento) 40%

Procesos y productos 30%

Desarrollo y Actividades 30%

Para hacer un total del 100%